Table de caractères de $\mathfrak{A}_5$

Florian BOUGUET

Référence : PEYRÉ : L'algèbre discrète de la transformée de FOURIER

Theorème 1

La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ est :

	$\boxed{1}$ (1)	$\boxed{6}$ (12)	$\boxed{8}$ (123)	$\boxed{6}$ (1234)	$\boxed{3}$ (12)(34)
χ_{tr}	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_{std}	3	1	0	-1	-1
χ_2	2	0	-1	0	2
χ_3	3	-1	0	1	-1

Preuve :

► Classes de conjugaison :
Le résultat est bien connu, des éléments de $\mathfrak{S}_4$ sont conjugués si, et seulement si, ils sont de même type.

► χ_{tr} et χ_{std} :
Regardons la représentation naturelle de $\mathfrak{S}_5$ sur $\mathbb{R}^4$ obtenue par permutation des vecteurs de base. Le caractère associé $\chi_{\mathbb{R}^4}$ est la trace d'une matrice de permutation, c'est-à-dire le nombre de 1 sur la diagonale. Autrement dit $\chi_{\mathbb{R}^4}(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ. Cette représentation laisse $Vect\{(1,1,1,1,1)\}$ stable, il s'agit donc d'une représentation de dimension 1 (la représentation triviale correspondant à χ_{tr}, on peut donc compléter la première ligne). On a alors un caractère de dimension 3, noté χ, tel que

$$\chi = \chi_{\mathbb{R}^4} - \chi_{tr} = [3, 1, 0, -1, -1]$$

Le calcul nous donne

$$< \chi, \chi >= \frac{1}{24}\left(1 \times 3^2 + 6 \times 1^2 + 8 \times 0^2 + 6 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^2\right) = 1$$

χ est donc irréductible, on peut donc le noter χ_{std} (pour "standard") et compléter la troisième ligne.

► χ_ε :
ε est un morphisme de $\mathfrak{S}_4$ dans $\{-1, 1\}$. On a donc une action de groupe linéaire, ou représentation, de degré 1 telle que :

$$\sigma \cdot x = \varepsilon(\sigma)x$$

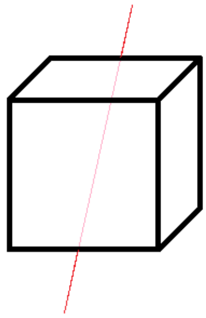
On peut donc compléter la deuxième ligne.

► χ_3 :
Finissons déjà de remplir la première colonne en remarquant que

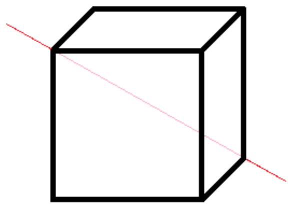
$$1 + 1 + 3^2 + a^2 + b^2 = 24 \Rightarrow a = 2, b = 3$$

On cherche donc deux représentations, l'une de degré 2 et l'autre de degré 3. Considérons l'action naturelle de $\mathfrak{S}_4$ sur les quatre grandes diagonales du cube de $\mathbb{R}^3$ (on peut montrer que le groupe des isométries positives du cube est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$). Cela nous livre une représentation de $\mathfrak{S}_4$ de dimension 3 de caractère χ.

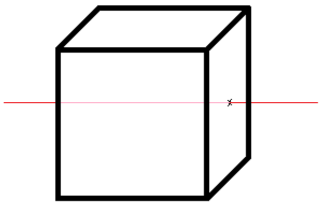
- $\chi((1)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}) = 3$
- $(12) \sim$ Rotation d'angle π :



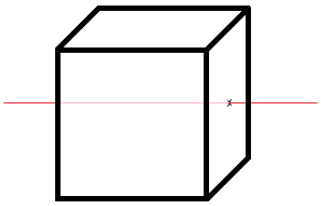
  $\chi((12)) = 1 - 2\cos(\pi) = -1$
- $(123) \sim$ Rotation d'angle $2\pi/3$:



  $\chi((123)) = 1 - 2\cos(\pi/3) = 0$
- $(1234) \sim$ Rotation d'angle $\pi/2$:



  $\chi((123)) = 1 - 2\cos(\pi/2) = 1$
- $(12)(34) \sim$ Rotation d'angle π :



  $\chi((123)) = 1 - 2\cos(\pi) = -1$

On calcule alors $< \chi, \chi >= 1$ donc χ est irréductible, on peut donc le noter χ_3 et compléter la quatrième ligne.

► χ_2 :
On peut alors déterminer χ_2 par orthogonalité des caractères, et résolvant un système de 4 équations à quatre inconnues.

$\square$

Remarques :
Il existe deux autre façons de compléter cette table. On peut déterminer χ_{std} en regardant l'action de $\mathfrak{S}_4$ comme groupe des isométries du tétraèdre, et étudier l'action de $\mathfrak{S}_4$ sur le groupe de KLEIN pour obtenir χ_2...