Développement : Théorème de Frobenius

Année 2013/2014

Dans tout ce développement G représente un groupe fini et on considère les représentations de G sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini. On défini par $|G|$ le nombre d'éléments de G. En général $V_\bullet$ (resp. $\rho_\bullet$, $\chi_\bullet$) correspond à une représentation (resp. le morphisme, le caractère associé). On suppose connu le théorème de Maschke et lemme de Schur.

Théorème (Frobenius)**.** *L'ensemble des caractères irréductibles forme une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales.*

Montrons dans un premier temps l'orthonormalité : soit V_1, V_2 deux représentations irréductibles. On a :

$$\begin{aligned}
\overline{\langle \chi_1, \chi_2 \rangle} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_1(g)}\chi_2(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)}(g) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{tr}\begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(V_1,V_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V_1,V_2) \\ u & \longmapsto & g\cdot u \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{tr}\left(M : \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(V_1,V_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V_1,V_2) \\ u & \longmapsto & \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot u \end{array}\right),
\end{aligned}$$

où M désigne l'opérateur linéaire dont on prend la trace. Pour $u \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, $M(u)$ est fixe sous l'action de G, ainsi

$$\mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2).$$

Il y a deux cas intéressants :

- Si $V_1 \not\simeq V_2$, par le lemme de Schur $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \{0\}$, donc $M = 0$ et
$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = 0.$$
On en déduit l'orthogonalité des caractères.
- Si $V_1 = V_2$, par le lemme de Schur $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_1) = \mathrm{vect}(\mathrm{Id}_{V_1})$. De plus $M(\mathrm{Id}_{V_1}) = \mathrm{Id}_{V_1}$, donc
$$\mathrm{Hom}(V_1, V_1) = \ker M \oplus \mathrm{vect}(\mathrm{Id}_{V_1}),$$
et ces deux sous-espaces sont stable par M. Ainsi
$$\begin{aligned}
\overline{\langle \chi_1, \chi_1 \rangle} &= \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}\left(M_{|\ker M}\right) + \mathrm{tr}\left(M_{|\mathrm{vect}(\mathrm{Id}_{V_1})}\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(0_{\ker M}\right) + \mathrm{tr}\left(\mathrm{Id}_{\mathrm{vect}(\mathrm{Id}_{V_1})}\right) = 0 + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Donc les caractères irréductibles forment une famille orthonormal de l'espace des fonctions centrales.

Il reste à montrer que c'est une base, pour cela il suffit de montrer que si une fonction centrale est orthogonal à tous les caractères irréductibles, elle est nulle. Soit donc φ une fonction centrale orthogonal à tous les caractères irréductibles, on considère V_G la représentation canonique de G et on défini :

$$u_\varphi := \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \rho_{V_G}(g).$$

Grâce au théorème de Maschke on décompose V_G en représentations irréductibles :

$$V_G = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i.$$

On a que u_φ stabilise les V_i et de plus

$$(u_\varphi)_{|V_i} = \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \rho_{V_i}(g) : V_i \longrightarrow V_i.$$

Comme φ est central, $(u_\varphi)_{|V_i}$ est un morphisme de représentation, en effet pour $h \in G$:

$$\begin{aligned}(u_\varphi)_{|V_i} \rho_{V_i}(h) &= \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \rho_{V_i}(g) \rho_{V_i}(h) = \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \rho_{V_i}(gh) = \sum_{g \in G} \overline{\varphi(gh^{-1})} \rho_{V_i}(g) \\ &= \sum_{g \in G} \overline{\varphi(hgh^{-1})} \rho_{V_i}(hg) = \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \rho_{V_i}(h) \rho_{V_i}(g) = \rho_{V_i}(h)(u_\varphi)_{|V_i},\end{aligned}$$

donc par le lemme de Schur $(u_\varphi)_{|V_i} \in \mathrm{vect}(\mathrm{Id}_{V_i})$, calculons sa trace :

$$\mathrm{tr}\left((u_\varphi)_{|V_i}\right) = \mathrm{tr}\left(\sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \rho_{V_i}(g)\right) = \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \mathrm{tr}\left(\rho_{V_i}(g)\right) = \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \chi_i(g) = 0,$$

donc $(u_\varphi)_{|V_i} = 0$. Ainsi $u_\varphi = 0$ et en appliquant u_φ à e_1 on obtient

$$0 = u_\varphi(e_1) = \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} g \cdot e_1 = \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} e_g.$$

D'où pour tout $g \in G$, $\overline{\varphi(g)} = 0$, i.e. $\varphi = 0$, ce qui conclut la preuve.

Références

Pierre Colmez. *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. Editions Ecole Polytechnique, 2009.