

Autour des variables aléatoires gaussiennes

Florian BOUGUET

Référence : BARBE, LEDOUX : Probabilités

Leçons : 239, 240, 242, 245, 251

Les variables (et vecteurs) aléatoires gaussiennes forment un thème crucial en probabilités. En effet on peut les voir comme limite de nombreux phénomènes aléatoires (à l'aide du théorème central limite). Elles possèdent en outre des propriétés très souples et agréables. Ce développement a pour but d'en montrer quelques unes.

Proposition 1

Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Alors X a pour fonction caractéristique $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

Preuve de la proposition 1 :

Par définition, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2/2} dx \quad \text{par le lemme de transfert}$$

Nous allons ici donner une méthode requérant le théorème d'holomorphicité sous le signe intégral. On pourrait aussi utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral et vérifier que φ_X vérifie une équation différentielle du premier ordre (voir BARBE, LEDOUX).

Notons $f(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{zx} e^{-x^2/2}$ et $\Phi(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x, z) dx$.

– à x fixé, $f(x, \cdot)$ est holomorphe sur \mathbb{C} .

– à z fixé, $f(\cdot, z)$ est mesurable.

– $\forall x, z, |f(x, z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{|z|x} e^{-x^2/2}$ donc sur tout compact, f est majorée par une fonction intégrable indépendante de z .

Φ est donc holomorphe sur \mathbb{C} et, si $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2/2} dx = \frac{e^{\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-z)^2} dx \\ &= e^{\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \text{et on reconnaît l'intégrale d'une gaussienne} \\ &= e^{\frac{z^2}{2}} \end{aligned}$$

$z \mapsto e^{\frac{z^2}{2}}$ est holomorphe sur \mathbb{C} et coïncide avec Φ sur l'axe réel, donc sur \mathbb{C} tout entier. En particulier

$$\Phi(it) = \varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

□

Proposition 2 (admise)

Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Alors X a pour fonction caractéristique $\varphi_X(t) = e^{itm - \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$

La proposition 2, admise ici, se démontre exactement de la même manière que la proposition 1. On peut aussi ruser et considérer les variables centrées réduites (on soustrait la moyenne et on divise par l'écart-type)...

Proposition 3

Si X est un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m, K)$

Alors X a pour fonction caractéristique $\varphi_X(u) = e^{iu^T m - \frac{u^T K u}{2}}$

Preuve de la proposition 3 :

Toute l'astuce consiste ici à remarquer (cela peut être pris comme définition) qu'un vecteur aléatoire est gaussien si, et seulement si, toute combinaison linéaire de ses composantes est une gaussienne. Autrement dit, si le produit scalaire de ce vecteur aléatoire avec tout autre vecteur (déterministe) est une gaussienne (et on va alors pouvoir utiliser la propriété 2). Rappelons également que :

- m est le vecteur espérance de X (dont les coordonnées sont les espérances des marginales)
- K est la matrice de covariance du vecteur ($K_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$)

$\forall u \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}\left(e^{iu^T X}\right) = \varphi_{u^T X}(1)$$

$u^T X$ est une gaussienne et on a

- $\mathbb{E}(u^T X) = u^T m$
- $\text{Var}(u^T X) = u^T K u$

Donc la propriété 2 nous donne

$$\varphi_X(u) = \varphi_{u^T X}(1) = e^{iu^T m - \frac{u^T K u}{2}}$$

□

Proposition 4

Si (X, Y) est un vecteur gaussien et $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Alors $X \perp Y$

Preuve de la proposition 4 :

Attention de ne pas confondre la matrice de covariance du vecteur $K = \text{Cov}((X, Y))$ et la covariance des variables X et Y ! L'hypothèse de la proposition est que la seconde est nulle (i.e. que X et Y sont non-corrélées). C'est toujours le cas de deux variables indépendantes, et on va montrer que la réciproque est vraie pour des gaussiennes. Pour fixer les idées :

$$K = \text{Cov}((X, Y)) = \begin{bmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Var}(Y) \end{bmatrix}$$

L'hypothèse $\text{Cov}(X, Y)$ revient donc à dire que K est donc diagonale. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \varphi_{(X,Y)}(u, v) &= \exp\left(i(u, v)^T \mathbb{E}(X, Y) - \frac{(u, v)^T K (u, v)}{2}\right) \\ &= \exp\left(iu\mathbb{E}(X) + iv\mathbb{E}(Y) - \frac{u^2\text{Var}(X) + v^2\text{Var}(Y)}{2}\right) \\ &= \exp\left(iu\mathbb{E}(X) - \frac{u^2\text{Var}(X)}{2}\right) \exp\left(iv\mathbb{E}(Y) - \frac{v^2\text{Var}(Y)}{2}\right) \\ &= \varphi_X(u)\varphi_Y(v) \end{aligned}$$

La fonction caractéristique du vecteur étant le produit des fonctions caractéristiques des marginales, celles-ci sont donc indépendantes.

□