Orthodiagonalisabilité des endomorphismes auto-adjoints

Florian BOUGUET

Référence : GOURDON : Algèbre

Un développement facile mais intéressant sur la diagonalisabilité des endomorphismes auto-adjoints en base orthonormée. On se placera ici dans le cas des matrices symétriques réelles, mais le développement s'adapte extrêmement facilement au cas des matrices hermitiennes (en remplaçant transposée par transconjuguée).

Theorème 1

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.
Alors $\exists \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Omega^{-1}S\Omega$ soit diagonale réelle (en particulier, le spectre de S est réel).

Preuve du théorème 1 :
La preuve se fait en deux temps. Tout d'abord, montrons que le spectre de S est réel. Soit λ une valeur propre de S (potentiellement complexe) et x un vecteur propre non-nul associé.

$$\begin{aligned} \lambda\|x\|^2 &= <\lambda x, x> = <Sx, x> = <x, S^T x> = <x, Sx> \\ &= <x, \lambda x> = \bar{\lambda}\|x\|^2 \end{aligned}$$

En divisant par $\|x\|^2 \neq 0$, on obtient $\lambda = \bar{\lambda}$, donc $\lambda \in \mathbb{R}$, donc Sp$(S) \in \mathbb{R}$.

Raisonnons maintenant par récurrence sur n, en considérant s l'endomorphisme canoniquement associé à S. Si $n = 1$ le résultat est évident. Supposons donc qu'un endomorphisme auto-adjoint soit orthodiagonalisable dans tout espace de dimension inférieure ou égale à $n - 1$.

Soit $\lambda \in$Sp(S). Notons $F = \ker(s - \lambda \mathrm{Id})$, et G son orthogonal. $s_{|F}$ est une homothétie de rapport λ. F est stable par s donc G est stable par s^* donc par s, et $s_{|G}$ est évidemment auto-adjoint. Puisque dim$(G)< n$, $s_{|G}$ est orthodiagonalisable. Bref, dans une base orthonormale adaptée obtenue en concaténant les bases orthonormées "intéressantes" de F et G, s est diagonale. Autrement dit en version matricielle, $\exists \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Omega^{-1}S\Omega$ soit diagonale.

□

Corollaire 1

Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Alors $\exists ! R \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = S$, et on note $R = \sqrt{S}$.
On peut ajouter que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sqrt{S} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Preuve du corollaire 1 :
Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Omega^{-1}S\Omega = D =$diag(λ_i) où les λ_i sont des réels distincts (et positifs par hypothèse sur S). Notons $\sqrt{D} =$diag$(\sqrt{\lambda_i})$, et $\sqrt{S} = \Omega\sqrt{D}\Omega^{-1}$.

$$(\sqrt{S})^2 = \Omega\sqrt{D}\Omega^{-1}\Omega\sqrt{D}\Omega^{-1} = \Omega(\sqrt{D})^2\Omega^{-1} = \Omega D\Omega^{-1} = S$$

$$(\sqrt{S})^T = (\Omega\sqrt{D}\Omega^{-1})^T = \Omega\sqrt{D}\Omega^T = \sqrt{S} \qquad \text{car } \Omega^T = \Omega^{-1}$$

On a donc bien existence de la racine carrée sur $S_n^+(\mathbb{R})$. Reste à montrer l'unicité. Soit $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = (\sqrt{S})^2 = S$. On va montrer que $R = \sqrt{S}$ définie plus haut.

Pour cela, notons respectivement $s, r,$ et $\sqrt{s}$ les endomorphismes canoniquement associés à $S, R,$ et $\sqrt{S}$. Si on note $E_i = \ker(s - \lambda_i \mathrm{Id})$, on vient juste de construire $\sqrt{s}$ comme $(\sqrt{s})_{|E_i} = \sqrt{\lambda_i}\mathrm{Id}$.

r et s commutent car $s = r^2$. Donc les E_i sont stables par r et $(r_{|E_i})^2 = s_{|E_i}$. Si μ est une valeur propre (donc réelle positive) de $r_{|E_i}$, on a forcément $\mu^2 = \lambda_i$ donc $\mu = \sqrt{\lambda_i}$. De plus, $r_{|E_i}$ est auto-adjoint donc diagonalisable, donc

$$r_{|E_i} = \sqrt{\lambda_i}\mathrm{Id} = (\sqrt{s})_{|E_i}$$

D'où $R = \sqrt{S}$.

$\square$

Corollaire 2

Soient $S, R \in S_n(\mathbb{R})$.
Si S et R commutent, alors S et R sont simultanément orthodiagonalisables.

Preuve du corollaire 2 :
Notons respectivement s et r les endomorphismes canoniquement associés à S et R. Si on note $E_i = \ker(s - \lambda_i \mathrm{Id})$ où les λ_i sont les valeurs propres distinctes de s.

s et r commutent donc les E_i sont stables par r. $r_{|E_i}$ est auto-adjoint donc orthodiagonalisable. Donc $\exists B_i$ base orthonormée de E_i dans laquelle $s_{|E_i}$ et $r_{|E_i}$ sont diagonaux. En concaténant les B_i, on obtient le résultat voulu.

$\square$