L'ellipse de Steiner

Florian BOUGUET

Theorème 1

Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts non-alignés du plan affine. Si on note $P = (X-a)(X-b)(X-c)$ et ω_1 et ω_2 les racines de P', alors l'ellipse de foyers $F_1(\omega_1)$ et $F_2(\omega_2)$ tangente en un côté du triangle ABC est tangente à tous les côtés en leur milieu.

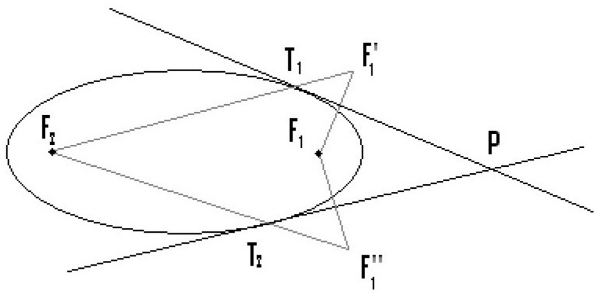
Avant de démontrer le théorème proprement dit, nous allons introduire le lemme suivant :

Lemme 1 (*de Poncelet*)

Considérons une ellipse de foyers F_1, F_2 et un point P extérieur à l'ellipse. Si on note T_1 et T_2 les points de tangences issus de P, alors on a

$$(PT_1, PF_1) = (PF_2, PT_2)$$

Démonstration du lemme de Poncelet



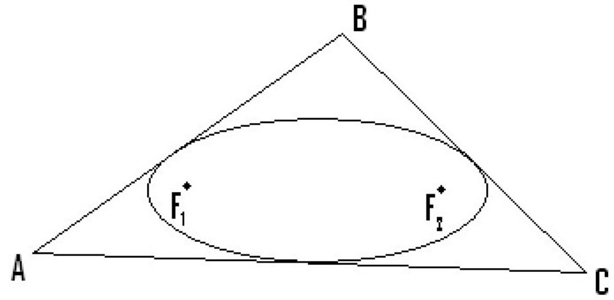
Notons σ_{PF_i} et σ_{PT_i} les symétries axiales respectives par rapport à (PF_i) et (PT_i). Montrer que $(PT_1, PF_1) = (PF_2, PT_2)$ revient à montrer que $\rho_1 = \sigma_{PF_1} \circ \sigma_{PT_1} = \sigma_{PT_2} \circ \sigma_{PF_2} = \rho_2$. En effet, ρ_1 et ρ_2 sont des rotations de centre P...

(PT_1) est tangente à l'ellipse en T_1, et donc, par définition, il s'agit de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F_1T_1F_2}$. Donc, si on note F_1'=$\sigma_{PT_1}(F_1)$, les points F_2, T_1 et F_1' sont alignés dans cet ordre. De même, en notant F_1''=$\sigma_{PT_2}(F_1)$, les points F_2, T_2 et F_1'' sont alignés dans cet ordre. L'idée est de calculer l'image de F_1' par ρ_1 et ρ_2 est la même, à savoir F_1.

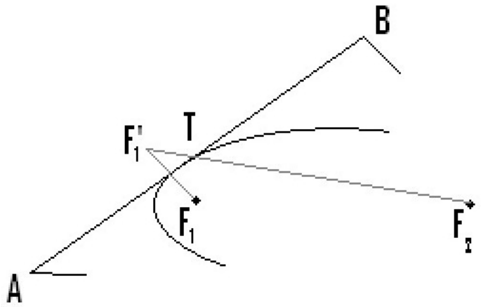
- $\sigma_{PT_1}(F_1') = F_1$ par définition de F_1'. $\sigma_{PF_1}(F_1) = F_1$ de manière plutôt évidente, et donc $\rho_1(F_1') = F_1$
- $d(F_2, F_1') = d(F_2, T_1) + d(T_1, F_1') = d(F_2, T_1) + d(T_1, F_1) = 2a$. De même, $d(F_2, F_1'') = 2a$. On a donc $d(F_2, F_1') = d(F_2, F_1'')$. De plus, $d(P, F_1') = d(P, F_1) = d(P, F_1'')$. Donc (PF_2) est la médiatrice de $[F_1'F_1'']$, et donc $\sigma_{PF_2}(F_1') = F_1''$. Enfin, par définition de F_1'', $\sigma_{PT_2}(F_1'') = F_1$. Donc $\rho_2(F1') = F_1$.

Donc $\rho_1 = \rho_2$, CQFD.

Démonstration du théorème



Rappelons que les points A, B, C, F_1 et F_2 ont pour affixes respectives a, b, c, ω_1 et ω_2, et qu'on a noté $P = (X-a)(X-b)(X-c)$. On peut construire l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F_1 et F_2 tangente au côté $[AB]$. Pour ce faire, on trace F_1', symétrique de F_1 par rapport à $[AB]$ puis T, intersection de (AB) et (F_2F_1'). On a alors un point de l'ellipse, nécessaire et suffisant pour construire $\mathcal{E}$. Cette construction est justifiée par le théorème de Gauss-Lucas, qui affirme que les points F_1 et F_2 sont contenus dans l'enveloppe convexe du triangle ABC, c'est-à-dire le triangle ABC.



On doit maintenant montrer que $\mathcal{E}$ est tangente à tous les côtés en leurs milieux. Toute la démonstration repose sur le fait que P' peut s'écrire de deux façons, à savoir :

$$\begin{aligned} P' &= (X-a)(X-b)+(X-a)(X-c)+(X-b)(X-c) \\ &= 3(X-\omega_1)(X-\omega_2) \end{aligned}$$

Tangence en les côtés du triangle

On va montrer que $[AC]$ est tangente à $\mathcal{E}$. Evaluons donc P' en a :

$$\begin{aligned} P'(a) &= (a-a)(a-b)+(a-a)(a-c)+(a-b)(a-c) = (a-b)(a-c) \\ &= 3(a-\omega_1)(a-\omega_2) \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{a-b}{a-\omega_1} = 3\frac{a-\omega_2}{a-c}$$

D'où, par passage aux arguments, $(AB, AF_1) = (AF_2, AC)$. (AC) est donc tangente à $\mathcal{E}$ par le lemme de Poncelet.

En calculant $P'(b)$, on montre exactement de la même manière que (BC) est tangente à $\mathcal{E}$.

Tangence en les milieux

On va maintenant montrer que la tangence s'effectue en les milieux des côtés. Notons I le milieu de $[AB]$, d'affixe $\frac{a+b}{2}$. Evaluons P' en ce nombre :

$$\begin{aligned} P'(\frac{a+b}{2}) &= (\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)+(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-c)+(\frac{a+b}{2}-b)(\frac{a+b}{2}-c) \\ &= 3(\frac{a+b}{2}-\omega_1)(\frac{a+b}{2}-\omega_2) \end{aligned}$$

Puisque $\frac{a+b}{2}-a=-\left(\frac{a+b}{2}-b\right)$, on a

$$(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)=3(\frac{a+b}{2}-\omega_1)(\frac{a+b}{2}-\omega_2)$$

A nouveau, par passage aux arguments on obtient que $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IF_1})=(\overrightarrow{IF_2},\overrightarrow{IB})$. I est donc le point de tangence de $\mathcal{E}$ et (AB).

Encore de la même manière, en évaluant P' en les milieux de $[AC]$ et $[BC]$, on obtient la tangence en leurs milieux respectifs. CQFD.

Remarques

On pourra s'interroger sur deux points importants de ce développement. Tout d'abord, le fait que F_2, T_1 et F_1' soient alignés (seconde partie de la démonstration du lemme de Poncelet) n'est pas tout à fait trivial. Il s'agit d'une conséquence du fait que la tangente est la bissectrice extérieure de $\widehat{F_1T_1F_2}$ (l'écrire une fois permet de s'en convaincre).

De plus, le fait que I vérifie $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IF_1})=(\overrightarrow{IF_2},\overrightarrow{IB})$ (fin de la démonstration du théorème) n'implique pas tout de suite que I soit le point de tangence. Cependant, en notant T ce fameux point de tangence sur (AB), on peut conclure rapidement par l'absurde que T et I sont confondus.

Enfin, une des propriétés les plus intéressantes de l'ellipse de Steiner est qu'il s'agit de l'ellipse de volume maximal inscrite dans son triangle. C'est loin d'être une propriété triviale à montrer, et il peut être bon d'avoir une idée de sa démonstration (qui fait appel à des calculs en coordonnées barycentriques). On peut en trouver une preuve dans *Mathematical Plums* de R. Honsberger (dans la partie de G.D. Chakerian appelée *A Distorted View of Geometry*).