Formule d'inversion de Fourier

Arnaud Girand

20 avril 2012

Référence :
- [QZ07] p. 331–332

Leçons :
-

Prérequis :
-

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on définit sa transformée de Fourier comme suit :

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx$$

Proposition 1
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{f}}(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \widehat{f}(t) dt$$

Démonstration : Pour $\varepsilon > 0$ on pose $f_\varepsilon : t \mapsto e^{-\varepsilon t^2} e^{itx} \widehat{f}(t)$. Alors :
- les f_ε sont L^1 ;
- $f_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} e^{itx} \widehat{f}(t)$ presque partout sur $\mathbb{R}$;
- $|f_\varepsilon| \leq |\widehat{f}| \in L^1(\mathbb{R})$.

De fait, par théorème de convergence dominée on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2} e^{itx} \widehat{f}(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \widehat{f}(t) dt \tag{1}$$

Remarquons à présent à présent que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |e^{it(x-y)} e^{-\varepsilon t^2} f(y)| dy dt \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2} dt \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy < \infty$$

De fait, par théorème de Fubini–Tonelli on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx - \varepsilon t^2} \widehat{f}(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)} e^{-\varepsilon t^2} f(y) dy dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)} e^{-\varepsilon t^2} f(y) | dt dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)} e^{-\varepsilon t^2} dt dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{(y-x)^2/4\varepsilon} dy \text{ (cf. infra)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} f(x + 2\sqrt{\varepsilon} y) dy \text{ via } y \mapsto x + 2\sqrt{\varepsilon} y)
\end{aligned}$$

Une nouvelle application du théorème de convergence dominée nous indique que :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} f(x + 2\sqrt{\varepsilon} y) dy \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy f(x) = \sqrt{\pi} f(x)$$

D'où le résultat via la relation (1).

Détails supplémentaires :

– Il nous reste à justifier le calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)}e^{-\varepsilon t^2}dt$. Posons :

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2}dt$$

Alors comme la fonction $(x,t) \mapsto e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2}$ est $\mathcal{C}^1$ selon sa première variable, intégrable selon sa deuxième et que sa dérivée "en x" est dominée par $t \mapsto te^{-\varepsilon t^2}$ qui est intégrable on a, par théorème de dérivation sous le signe intégral que I est de classe $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\begin{aligned}
I'(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}(e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2})dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} (-it)e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2}dt \\
&= -\frac{i}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\frac{d}{dt}(e^{-\varepsilon t^2})dt \\
&= \frac{i}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}(e^{-itx})e^{-\varepsilon t^2}dt \text{ en intégrant par parties} \\
&= \frac{i}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} (-ix)e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2}dt \\
&= \frac{x}{2\varepsilon}I(x)
\end{aligned}$$

De fait $I(x) = I(0)e^{(x/2\varepsilon)/2}$. Or :

$$\begin{aligned}
I(0) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt \text{ via } t \mapsto \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)}e^{-\varepsilon t^2}dt = I(y-x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}e^{(y-x)^2/4\varepsilon}$$

Références

[QZ07] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation (3e édition)*. Dunod, 2007.