Théorème de Montel

Arnaud Girand

7 janvier 2012

Références :
– [Rud98], p. 329 et [QZ95], p. 157

Leçons :
– 203 - Utilisation de la notion de compacité.
– 245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Prérequis :
– théorème d'Ascoli ;
– formule de Cauchy.

Proposition 1 (Montel)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.
Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ une famille uniformément bornée sur tout compact (de $\mathbb{C}$) inclus dans Ω, i.e :

$$\forall K \subset\subset \Omega,\, \exists M(K) > 0,\, \forall f \in \mathcal{F},\, \forall z \in K, \quad |f(z)| \leq M(K)$$

Alors de toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ on peut extraire une suite convergeant uniformément sur tout compact inclus dans Ω.

Démonstration : Soit $(K_n)_n$ une suite de compacts inclus dans Ω tels que (cf. infra) :

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n \text{ et } \forall n \geq 0,\ K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$$

De par cette dernière relation, on peut trouver une suite $(\delta_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \geq 0,\, \forall z \in K_n,\, \mathcal{B}(z, 2\delta_n) \subset K_{n+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $x, y \in K_n$ tels que $|x - y| < \delta_n$. Si on note γ le cercle de centre x et de rayon $2\delta_n$ orienté positivement, alors par formule de Cauchy :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(\xi) \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - y} \right) d\xi \\ &= \frac{x-y}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - x)(\xi - y)} d\xi \end{aligned}$$

Pour tout ξ dans l'image de γ, $|\xi - x| = 2\delta_n$ et $|\xi - y| > \delta_n$. Ainsi :

$$\forall f \in \mathcal{F},\, \forall x, y \in K_n \text{ tels que } |x - y| < \delta_n, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{M(K_{n+1}}{\delta_n} |x - y|$$

Donc $\mathcal{F}_n := \{f_{|K_n} \mid f \in \mathcal{F}\}$ est équicontinue et uniformément bornée donc par théorème d'Ascoli relativement compacte dans $\mathcal{C}(K_n)$. De fait, de toute suite $(f_k)_k \in \mathcal{F}_n^{\mathbb{N}} \subset \overline{\mathcal{F}_n}^{\mathbb{N}}$ on peut extraire une suite convergeant uniformément sur K_n. Un procédé d'extraction diagonale permet alors de conclure. En effet, on fabrique ainsi une extraction $(f_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k(k)})_k$ convergeant sur tous les K_n et si K est un compact inclus dans Ω, $K \subset \cup_n \overset{\circ}{K}_n$. Cette dernière expression formant un recouvrement ouvert du compact K on peut extraire un recouvrement fini ce qui signifie par croissance de $(\overset{\circ}{K}_n)_n$ qu'il existe n tel que $K \subset \overset{\circ}{K}_n \subset K_n$, d'où le résultat.

Corollaire 1.1 ([QZ95], p. 157)
Soit Ω un ouvert convexe borné de $\mathbb{C}$.
Soit $a \in \Omega$.
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f(a) = a$ et $|f'(a)| < 1$.
Alors on peut extraire de $(f^n)_n$ un sous–suite convergeant uniformément vers a sur tout compact inclus dans Ω (où $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$).

Démonstration : Soit $\lambda \in (0,1)$ et soit $r > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}}(a,r) \subset \Omega$ et que $\forall z \in \overline{\mathcal{B}}(a,r)$, $|f'(z)| \leq \lambda$ (tout ceci est possible par continuité de f'). Par inégalité des accroissements finis on a alors :

$$\forall z \in \overline{\mathcal{B}}(a,r), \quad |f(z) - a| \leq \lambda |z - a|$$

On montre alors par récurrence que :

$$\forall n \geq 1,\ \forall z \in \overline{\mathcal{B}}(a,r), \quad |f^n(z) - a| \leq \lambda^n |z - a| \leq \lambda^n r$$

De fait, $A := \{f^n \,|\, n \geq 1\}$ est uniformément bornée sur tout compact de Ω, et donc par théorème de Montel il existe une sous–suite de $(f^n)_n$ qui converge uniformément sur tout compact inclus dans Ω vers une fonction $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ constante égale à a sur $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$. Ω étant connexe, le théorème de prolongement analytique impose que g soit égale à a sur tout Ω, d'où le résultat.

Détails supplémentaires :

- Pour construire la suite $(K_n)_n$ on peut procéder comme suit (cf. [Rud98], p. 311) : on compactifie $\mathbb{C}$ en la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ et on pose

  $$\forall n \geq 0, \quad V_n := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > n\} \bigcup \bigcup_{a \notin \Omega} \mathcal{B}\left(a, \frac{1}{n}\right)$$

  On montre ensuite que $K_n := \mathbb{S}^2 \setminus V_n$ convient (on peut tenter de s'en convaincre par un dessin).

Références

[QZ95] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.

[Rud98] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe (3e édition).* Dunod, 1998.