Théorème de Molien

2012-2013

Référence : Eric Leichtnam, *Exercices d'oraux X-ENS : tome Algèbre et Géométrie*, Ellipses, 1999, p. 95.

Théorème.
Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de V.
Soit G un sous-groupe fini de $GL(V)$.
On note $A = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et on pose :

$$\begin{array}{cccl} \sigma & : & G & \longrightarrow & \mathfrak{S}(A) \\ & & g & \longmapsto & (P \mapsto P(g.(X_1, \dots, X_n))) \end{array}$$

où $(X_1, \dots, X_n)$ est identifié avec la colonne ayant pour coordonnées $X_1, \dots, X_n$ et . est le produit matriciel.
i.e., *si $g = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$,*

$$\sigma(g)(P(X_1, \dots, X_n)) = P\left(\sum_{j=1}^{n} u_{1,j} X_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} u_{n,j} X_j\right)$$

Alors :
- *σ définit une action de G sur A et est à valeurs dans $GL(A)$, on notera $\sigma(g)(P) = g \cdot P$.*
- *Pour $k \in \mathbb{N}$, on note A_k l'espace des polynômes homogènes de A de degré k. L'action de G sur A induit alors une action de G sur A_k.*
- *Finalement, on note A_k^G l'ensemble des points fixes sous cette action,* i.e.

  $$A_k^G = \{P \in A_k \mid \forall g \in G, g \cdot P = P\}$$

  et $a_k(G) = \dim A_k^G$.
  On a alors :

  $$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(G) X^k = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(\mathrm{Id} - Xg)}$$

Lemme.
Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et G un groupe fini.

Soit $\varphi : G \to GL(V)$ un morphisme de groupes.
On note :

$$V^G = \bigcap_{g \in G} \ker(\varphi(g) - \mathrm{Id})$$

Alors :

$$\dim V^G = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \operatorname{Trace} \varphi(g)$$

Démonstration. On considère :

$$p_G = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \varphi(g)$$

Montrons que $p_G(V) = V^G$:
– Soit $v \in V, h \in G$, alors :

$$\begin{aligned} \varphi(h)(p_G(v)) &= \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \varphi(h)\varphi(g)(v) \\ &= \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \varphi(hg)(v) \\ &= p_G(v) \end{aligned}$$

car $g \mapsto hg$ est une bijection de G, donc $p_G(V) \subseteq V^G$.

– Réciproquement, on a $p_G(v) = v$ pour tout $v \in V^G$, donc $V^G \subseteq p_G(V)$.
L'égalité $\varphi(h)p_G = p_G$ pour tout $h \in G$ montre que ${p_G}^2 = p_G$, donc p_G est un projecteur d'image V^G.
D'où :

$$\operatorname{rang} p_G = \dim V^G = \operatorname{Trace} p_G$$

D'où le résultat par linéarité de la trace. □

Démonstration du théorème.

– Montrons d'abord que σ définit bien une action de G sur A. On a :

$$\begin{aligned} g \cdot (g' \cdot P) &= g \cdot P(g'.(X_1, \ldots, X_n)) \\ &= P(gg'.(X_1, \ldots, X_n)) \\ &= (gg') \cdot P \end{aligned}$$

et $\mathrm{Id} \cdot g = g$.
De plus, $\sigma(g)$ est clairement linéaire, donc $\sigma(g) \in GL(A)$.

– Pour $k \in \mathbb{N}$, $g \cdot A_k \subseteq A_k$, donc l'action de G sur A induit une action de G sur A_k. Notons $\sigma_k : G \to GL(A_k)$ le morphisme induit par σ.

– Soit $g \in G$. Observons d'abord que g est diagonalisable. En effet, le polynôme $X^{\operatorname{Card} G} - 1$ annule g et est scindé à racines simples.
Soit alors $u \in GL(V)$ tel que la matrice de ugu^{-1} dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ soit diagonale et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de g.
Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\det(\mathrm{Id} - Xg)} &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \lambda_i X} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_i^k X^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n} \right) X^k
\end{aligned}$$

D'autre part, si $k_1 + \cdots + k_n = k$, alors :

$$\sigma_k(ugu^{-1})(X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}) = \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n} X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$$

Donc $\lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n}$ est valeur propre de $\sigma_k(ugu^{-1})$. Or les $X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$ forment une base de A_k, donc :

$$\mathrm{Trace}(\sigma_k(g)) = \mathrm{Trace}(\sigma_k(ugu^{-1})) = \sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n}$$

D'où :

$$\frac{1}{\det(\mathrm{Id} - Xg)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Trace}(\sigma_k(g)) X^k$$

En appliquant le lemme avec $V = A_k$ et $\varphi = \sigma_k$, on obtient :

$$\dim A_k^G = a_k(G) = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \mathrm{Trace}(\sigma_k(g))$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(G) X^k &= \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{g \in G} \mathrm{Trace}(\sigma_k(g)) X^k \\
&= \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Trace}(\sigma_k(g)) X^k \\
&= \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(\mathrm{Id} - Xg)}
\end{aligned}$$

□