Wolper
Carton

Hors Ct (...) Alg (...)

910 Langages Algébriques

Introduction : Les langages algébriques sont l'une des classes de la hiérarchie de Chomsky et sont utiles dans l'analyse syntaxique des langages de programmation, notamment dans la reconnaissance des blocs parenthésés

I Grammaires algébriques. Définitions et propriétés

[C] p76

1) Premières définitions

Déf : * Une grammaire algébrique est un quadruplet $G=(\Sigma, V, P, S)$ où :
- Σ est un alphabet de terminaux fini
- V est un ensemble fini de variables
- $P \subset V \times (\Sigma+V)^*$ un ensemble fini de règles de production
- $S \in V$ un axiome

* On dit que $u \in (\Sigma+V)^*$ se dérive en $v \in (\Sigma+V)^*$ si $u = xXy$, $v = x\alpha y$ et $(X, \alpha) \in P$, noté $u \to v$

* On dit que $w \in \Sigma^*$ est engendré par G si on peut l'obtenir par une suite finie de dérivations à partir de S

* le langage engendré par G est l'ensemble des mots engendrés par G, noté $L(G)$

* Un langage est dit algébrique s'il est engendré par une grammaire algébrique

Exemple : Soit $G=(\Sigma, V, P, S)$ la grammaire telle que :
$V=\{S, A, B\}$, $\Sigma=\{a,b\}$ $P=\{S\to A, S\to B, A\to aA, B\to bB, A\to\varepsilon, B\to\varepsilon\}$

$L(G)=\{a^n, n\geq 0\} \cup \{b^n, n\geq 0\}$

par exemple $aaa \in L(G)$:
$S \to A \to aA \to aaA \to aaaA \to aaa$

Lemme fondamental : Soit $G=(\Sigma, V, P, S)$ une grammaire algébrique, $u \in (\Sigma+V)^*$, $v \in (\Sigma+V)^*$.
On suppose que u se factorise en $u_1 u_2 = u$

Alors : $u \xrightarrow{k} v \iff u_1 \xrightarrow{k_1} v_1$, $u_2 \xrightarrow{k_2} v_2$ $v = v_1 v_2$ et $k_1+k_2=k$

2) Arbres de dérivation, ambiguïté

[C] p90

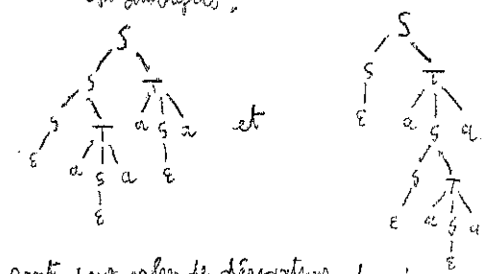
Déf : Soit $G=(\Sigma, V, P, S)$ une grammaire algébrique

* Un arbre de dérivation est un arbre fini étiqueté par $\Sigma \cup V \cup \{\varepsilon\}$ tel que si A est l'étiquette d'un nœud et $\alpha_1, \dots \alpha_n$ celles de ses fils, alors $(A, \alpha_1, \dots \alpha_n) \in P$

* la frontière d'un arbre de dérivation est le mot obtenu en concaténant les étiquettes des feuilles de gauche à droite

* une grammaire est dite ambiguë s'il existe un mot ayant au moins deux arbres de dérivation de racine étiquetés par S

Exemple : la grammaire définie par $\{S \to ST+\varepsilon, T \to aSa\}$ est ambiguë :



sont deux arbres de dérivation de a^4

3) Diverses formes de Grammaire

[C] p79

- Forme réduite : Une grammaire (Σ, V, P, S) est dite réduite si $\forall A \in V$, $L_G(A) \neq \emptyset$ et $\forall A \in V$, $\exists u, v \in (\Sigma+V)^*$ $S \xrightarrow{*} uAv$

Propriété : Pour toute grammaire, il existe une grammaire réduite engendrant le même langage.

- Forme propre : Une grammaire $G=(\Sigma, V, P, S)$ est dite propre si P ne contient pas de règles $A \to \varepsilon$ ou $A \to B$, $A, B \in V$

⚠ gram ≠ gram alg

preuves constructives (algos)

Forme normale de Greibach

FNC dérivation $S \to w$ est forcément de longueur $2n$ ($n = |w|$)

[C] p92

Propriété : Pour toute grammaire G, il existe une grammaire propre G' telle que $L(G) = L(G') / \{\varepsilon\}$

• Forme normale de Chomsky : Une grammaire est sous forme normale de Chomsky si toutes les règles sont de la forme : $A \to A_1 A_2$, $A_1, A_2 \in V$ ou $A \to a$, $a \in \Sigma$

Propriété : Pour toute grammaire G, il existe une grammaire sous forme de Chomsky G' telle que $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$

Exemple : La grammaire G définie par $S \to aSb + \varepsilon$ est réduite,

La forme propre associée est $S \to aSb + ab$

et sa forme de Chomsky $\left\{ \begin{array}{l} S \to AS_1 + AB \quad A \to a \\ S_1 \to SB \quad\quad\quad B \to b \end{array} \right\}$

II Propriétés des langages algébriques

1) Lemme d'Ogden

Lemme : Pour tout langage algébrique L, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $f \in L$ ayant au moins K lettres distinguées, f se factorise en $f = \alpha u \beta v \gamma$ avec :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\alpha u^n \beta v^n \gamma \in L$
- au moins α, u, β ou β, v, γ contiennent des lettres distinguées
- $u \beta v$ contient moins de K lettres distinguées

Application : $\{a^n b^n c^n, n \geq 0\}$ n'est pas algébrique

[C] p97

2) Propriétés de clôture

• **Proposition** : la classe des langages algébriques est close par union, concaténation et étoile

• **Proposition** : l'intersection de deux langages algébriques et le complémentaire d'un langage algébrique ne sont pas algébriques [C] p94

Contre exemple pour l'intersection :

$\{a^n b^n c^n, n \geq 0\} = \{a^n b^n c^m, n, m \geq 0\} \cap \{a^m b^n c^n, n, m \geq 0\}$

3) Problèmes décidables et indécidables

• **Proposition** : • Il existe un algorithme permettant de vérifier si un langage algébrique est vide

• Il existe un algorithme permettant de vérifier si un mot appartient à un langage algébrique

c'est l'Algorithme de Cocke Younger, Kasami **DVPT**

• **Proposition** : Les problèmes suivants sont indécidables : [C] p.153

- deux langages algébriques sont-ils égaux ?
- l'intersection de deux langages algébriques est-elle vide ?
- un langage algébrique est-il universel ?

Preuve par réduction du Problème de Correspondance de Post

4) Théorème de Parikh

Théorème : Tout langage algébrique est commutativement équivalent à un langage rationnel **DVPT** [C] p86

III Automates à pile

1) **Définition** : * Un automate à pile à reconnaissance par état final est un objet de la forme $(Q, \Sigma, \Gamma, A, q_0, z_0, F)$ où : [C] p 104

- Q ensemble fini d'états
- Σ un alphabet d'entrée
- Γ un alphabet de pile
- $F \subset Q$ des états finaux
- $q_0 \in Q$ un état initial
- $z_0 \in \Gamma$ un symbole de pile initial
- A un ensemble de transitions de la forme $(q, z) \xrightarrow{y} (q', z')$, inclus dans $Q \times \Gamma \times \Sigma \times Q \times \Gamma^*$

* Un mot w est accepté s'il existe une suite de transitions lisant w issue de q_0 et arrivant dans un état de F.

* Le langage reconnu par l'automate est l'ensemble des mots acceptés

Théorème : Un langage est algébrique si et seulement si il existe un automate à pile reconnaissant L.

Application : l'intersection d'un langage algébrique et d'un langage rationnel est un langage algébrique.

[C] p112

2) Langages déterministes

Définition : * Un automate à pile est **déterministe** si :
pour tout $(q, \gamma) \in Q \times \Gamma^*$, soit il existe une unique transition de la forme $(q, \gamma, \frac{\varepsilon}{} q', \gamma')$ et aucune permettant de lire une lettre de Σ, soit il n'existe pas d'ε-transition pour (q, γ) et pour tout $a \in \Sigma$, il existe au plus une transition de la forme $(q, \gamma, \frac{a}{} q', \gamma')$

Proposition : le complémentaire d'un langage déterministe est déterministe

Propriétés : • le problème de l'universalité est décidable pour les langages algébriques déterministes
• le problème de l'égalité est décidable pour les langages algébriques déterministes

IV Analyse syntaxique

Objectif : étant donné un mot w et une grammaire G, on veut trouver si possible une dérivation de w dans G.

p113 [AUT]

1) Analyse descendante LL(1)

Principe : On va construire une dérivation gauche en regardant le premier non terminal de la dérivation en cours et la prochaine lettre à produire pour choisir la règle de production à appliquer

Exemple : $w = acbbcb$, $G = \{ S \xrightarrow{r_1} aSbS,\ S \xrightarrow{r_2} cT,\ T \xrightarrow{r_3} aTbc,\ T \xrightarrow{r_4} b \}$

$S, acbbcb \xrightarrow[r_1]{} aSbS, cbbcb \xrightarrow[r_2]{} acTbS, bbcb \xrightarrow[r_4]{} acbbS, cbb \xrightarrow[r_2]{} acbbcT, bb \xrightarrow[r_4]{} acbbcb, \emptyset$

Définition : Une grammaire est dite **LL(1)** si il est possible de déterminer quelle règle doit être appliquée au non-terminal le plus à gauche d'une dérivation gauche par la connaissance de ce non terminal et de la première lettre restante à lire

2) Analyse ascendante LR(0)

Principe : On va construire une dérivation droite en lisant w de gauche à droite et en réduisant le mot dès l'on reconnait un membre droit d'une règle de production

Exemple : $w = acdbb$ $G = \{ S \xrightarrow{r_1} aSb,\ S \xrightarrow{r_2} cT,\ T \xrightarrow{r_3} d \}$

$\emptyset \xrightarrow[\text{lecture}]{} a \xrightarrow[\text{lec.}]{} ac \xrightarrow[\text{lec}]{} acd \xrightarrow[r_3]{} acT \xrightarrow[r_2]{} aS \xrightarrow[\text{lec.}]{} aSb \xrightarrow[r_1]{} S$

Définition : Une grammaire est dite LR(0) si on sait, à chaque instant, s'il faut effectuer une lecture ou une réduction, et quelle réduction

Références :

[C] : Olivier Carton, Langages formels Calculabilité et Complexité

[Aut] : J-M Autebert Théorie des langages et des Automates

Développement : Théorème de Parikh.

Déf : Deux mots w et w' sont anagrammes si $w = a_1 \dots a_n$ et il existe σ une permutation de $\{1, \dots n\}$ telle que $w' = a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)}$

L'ensemble des anagramme de w est noté $\overline{w}$.

On appel image commutative d'un langage L, notée $\overline{L}$, l'ensemble $\{\overline{w},\ w \in L\}$.

Pour deux langages L et M, on dit qu'ils sont commutativement équivalent si $\overline{L} = \overline{M}$.

Thk : (Parikh) Tout langage algébrique L est commutativement équivalent à un langage rationnel R.

Pour prouver cela on va s'appuyer sur beaucoup d'outils et de lemmes intermédiaires.

Tout d'abord on définit les opérations de substitution.

pour une grammaire $G = (A, V, P)$, $V = \{X_1, \dots X_n\}$ et un n-uplet de langages $L = (L_1, \dots L_n)$ on définit par induction :

- $\varepsilon(L) = \{\varepsilon\}$; $a(L) = \{a\}$ pour $a \in A$; $X_i(L) = L_i$

  $xy(L) = x(L)y(L)$ pour $x, y \in (A+V)^*$; $K(L) = \bigcup_{w \in K} w(L)$ pour $K \subseteq (A+V)^*$

On introduit ensuite le système d'équations associé à une grammaire.

Déf : $G = (A, V, P)$, $V = (X_1, \dots X_n)$ on a alors le système $S(G)$ formé des n équations

$$L_i = \sum_{X_i \Rightarrow w} w(L) \quad \text{pour } i \leq n$$

On note alors L_G le n-uplet $(L_G(X_1), \dots L_G(X_n))$

et on a une proposition "évidente"

prop : $\forall w \in (A+V)^*$ on a $L_{G_1}(w) = w(L_{G_2})$

preuve par induction sur les substitutions.

Ensuite on se donne le lemme :

lemme : $G = (A, V, P)$ et L solution de $S(G)$

Si $w, w' \in (A+V)^*$ vérifient $w \xrightarrow{*} w'$ alors $w(L) \supset w'(L)$

preuve : Il suffit de démontrer le résultat pour une dérivation et le lemme s'en déduit.

si $w = u X_i v \longrightarrow u \gamma v = w'$, $X_i \to \gamma$ règle de la grammaire

L est solution de $S(G)$ donc $L_i = \sum_{X_i \to \delta} \delta(L)$ et donc $L_i \supset \gamma(L)$

d'où $w(L) \supset w'(L)$ ∎

de ce lemme on déduit :

prop : $G = (A, V, P)$, $V = \{X_1, \dots X_n\}$ alors L_G est la solution minimale de $S(G)$ pour l'inclusion.

preuve : - on vérifie que c'est bien une solution :

$$L_{G_i}(X_i) = \sum_{X_i \to \alpha} L_G(\alpha) = \sum_{X_i \to \alpha} \alpha(L_G)$$ d'après la proposition précédente

- la minimalité découle elle du lemme précédent. ∎

On se penche ensuite sur le cas des grammaires propres !

i.e. une grammaire dont tous les L_i ne contiennent pas ε.

prop : G propre alors L_G est l'unique solution propre de $S(G)$

preuve : G propre donc L_G propre et d'après la prop. précédente c'est une solution de $S(G)$.

On introduit la relation sur les langages $\overset{\ell}{\sim}$ avec $\ell \in \mathbb{N}$

telle que $K \overset{\ell}{\sim} K'$ si $\{w \in K, |w| \leq \ell\} = \{w \in K', |w| \leq \ell\}$.

On étend cette relation aux n-uplets, composante par composante.

Soient alors L et L' deux solutions propres de G.

On veut montrer que $L \overset{k}{\sim} L'$ pour tout k et donc $L = L'$.

par récurrence, pour $k = 0$, L et L' sont propre donc on a le résultat.

maintenant supposons $L \overset{k}{\sim} L'$ pour $k \geq 0$ et montrons $L \overset{k+1}{\sim} L'$ c'est à dire

$L_i \overset{k+1}{\sim} L'_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

On introduit $S_i = \{w \mid X_i \Rightarrow w\}$, alors par définition $L_i = S_i(L)$

On veut donc montrer $S_i(L) \overset{k}{\sim} S_i(L')$.

Soit donc $1 \leq i \leq n$ fixé et $w \in S_i$, $w = w_1 \dots w_p$. $w_j \in (A+V)$

$p \neq 0$ car la grammaire est propre.

Soit $u \in w(L)$ de longueur inférieur à $k+1$. alors $u = u_1 \dots u_p$

avec chaque u_j étant soit une lettre de A soit, si $w_j = X_k$ est un mot dans L_k.

de plus $|u_j| \leq k$ sinon $p = 1$ ce qui voudrait dire que $X_i \Rightarrow X_k \in P$

impossible car la grammaire est propre. Donc par hypothèse $u_j \in L'_k$

et donc $u \in w(L')$ d'où $L_i \subset L'_i$, l'inclusion inverse se montre

par symétrie des rôles. et on obtient le résultat. ☒

On définit alors le <u>système d'équations en commutatif</u>.

cela veut que si $\bar{u} = \bar{v}$ on a aussi $\overline{w(L)} = \overline{v(L)}$ et par

extension aux langages si $\bar{T} = \bar{K}$, $\overline{T(L)} = \overline{K(L)}$ on peut donc

définir de manière cohérente $\overline{S(n)}$ comme

$$\overline{L_i} = \sum_{X_i \Rightarrow w} \overline{w(L)} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

<u>prop</u>: $\overline{L_0}$ est l'unique solution propre de $\overline{S(n)}$ si la grammaire est propre.

la preuve est la même que la précédente

on raisonne si notre grammaire a $n+1$ variables $X_0, X_1, \dots X_n$ et que l'on a le résultat pour les nombres inférieurs.

Les règles de G s'écrivent

$$X_i \longrightarrow S_i(X_0, \dots X_n) \quad \text{pour } 0 \le i \le n.$$

où chaque S_i est rationnel sur $A+X$ avec $X = \{X_0, \dots X_n\}$.

soit $X' = X \setminus \{X_0\}$, on introduit la grammaire G_0 en considérant $X_1, \dots X_n$ comme des lettres terminales et en ne prenant que les règles associées à X_0 dans G, à savoir

$$G_0 = (A+X', \{X_0\}, \{X_0 \longrightarrow S_0(X_0, X')\})$$

que d'après le résultat précédent on a $R_0(X')$ solution rationnelle du système $\overline{S(G_0)}$

donc $\overline{R_0(X')} = \overline{S_0(R_0(X'), X')}$

soit alors la grammaire G' obtenue en remplaçant X_0 dans les autres règles par $R_0(X')$ donc

$$G' = (A, X', \{X_i \longrightarrow S_i(R_0(X'), X') \mid 1 \le i \le n\})$$

la grammaire G' vérifie les hypothèse de récurrence donc il existe n langages rationnels $R_1, \dots R_n$ sur A tel que $R' = (R_1, \dots R_n)$ est solution du système $\overline{S(G')}$ donc $\overline{R_i} = \overline{S_i(R_0(R'), R')}$ $\quad 1 \le i \le n$

Il reste à vérifié $R = (R_0(R'), R_1, \dots R_n)$ est solution de $\overline{S(G)}$.

En substituant X' par R' dans l'équation $\overline{R_0(X')} = \overline{S_0(R_0(X'), X')}$

on obtient une équation complétant les n équations $\overline{R_i} = \overline{S_i(R_0(R'), R')}$

et ceci termine la preuve. □

On prouve enfin le théorème de Poincaré :

soit L algébrique, $\alpha = (A, V, P)$, $L = L_\alpha(X, a)$

L_0 est l'unique solution de $S(\alpha)$ qui tend à se ramener à une grossière progrè.

On a aussi d'après le th précédent une solution rationnelle. d'où le résultat par unicité.

Si un dégré L n'est pas prépé on applique le résultat à $L \wedge \xi \in \mathbb{F}$.

C Q F D

ref : Cartan p. 83 à 90

Carton / Hopcroft

Lier : algorithme CYK.

Cocke, Kasami et Younger.

Prend en entrée un mot et une grammaire en forme normale quadratique G_1 et décide en temps cubique si w est engendré par G_1.

Il utilise la programmation dynamique.

$G_1 = (A, V, P)$ $\quad V = \{S_0, \dots S_{m-1}\}$

Soit $w = a_1 \dots a_n$ alors pour tous entiers $1 \le i \le j \le n$ on note $w[i,j]$ le facteur $a_i \dots a_j$ de w. On note alors $E_{i,j}$ l'ensemble des variables $S \in V$ telles que $w[i,j] \in L_{G_1}(S)$. L'algorithme calcul tous les ensembles $E_{i,j}$.

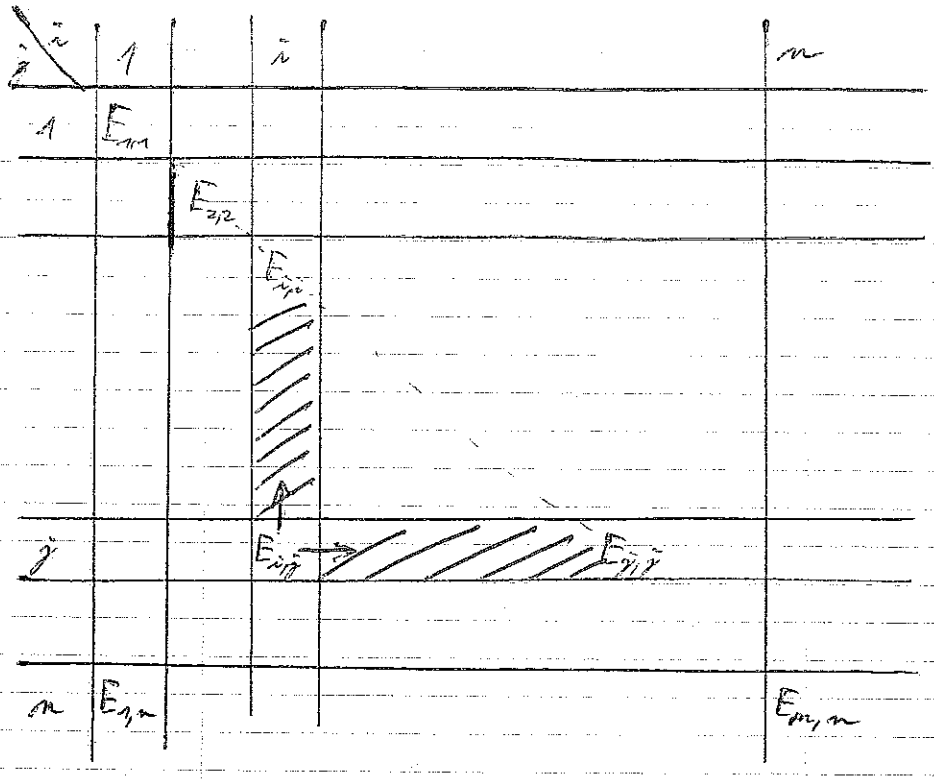
Le mot w appartient alors à $L_{G_1}(S_0)$ si $S_0 \in E_{1,n}$.

L'initialisation se fait sur $i = j$. alors $w[i,j]$ se réduit à la lettre a_i. Comme la grammaire est sous forme normale quadratique, $S \in E_{i,i}$ si et seulement si $S \to a_i$ est une règle de P.

Ensuite, pour $i < j$, $S \in E_{i,j}$ si et seulement si il existe une règle $S \to S_1 S_2$ de G_1 et un entier $i \le k < j$ tels que $w[i,k] \in L_{G_1}(S_1)$ et $w[k+1, j] \in L_{G_1}(S_2)$. (découle du lemme fondamental).

Donc E_{ij} peut être calculé à partir des ensembles $E_{i,k}$ et $E_{k+1,j}$.

On calcul donc les E_{ij} par récurrence sur la différence $j - i$.



⚠ les lignes s'app j et les col i m

$$E_{i,j} = \bigcup_{\substack{S \to S_1 S_2 \\ \text{t.q.} \\ S_1 \in E_{i,k} \text{ et} \\ S_2 \in E_{k+1,j}}} \{S\}$$

On a donc l'algorithme :

```
C-Y-K pour G = (w = a_1 ... a_n) =
    pour 1 ≤ i ≤ j ≤ n faire
        E_{i,j} ← ∅                                   (* initialisation *)
    fin
    pour i de 1 à n faire
        pour toute règle S → a faire
            si a_i = a alors E_{i,i} ← E_{i,i} ∪ {S}   (* cas i = j *)
        fin
    fin
    pour 1 ≤ d ≤ n-1 faire                            (* cas i < j ; d = j - i *)
        pour 1 ≤ i ≤ n-d faire
            pour i ≤ k < i+d faire
                pour toute règle S → S_1 S_2 faire
                    si S_1 ∈ E_{i,k} et S_2 ∈ E_{k+1,i+d} alors
                        E_{i,i+d} ← E_{i,i+d} ∪ {S}
                fin
            fin
        fin
    fin
```

Courd → ajouter ex