Lemme de Morse

2012-2013

Référence : François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition)*, Cassini, 2009, p.354.

Lemme de Morse.
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0.
Soit $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$ telle que :
– $Df(0) = 0$
– *la forme hessienne $D^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$.*
Alors il existe $\varphi : x \mapsto u$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que :
– $\varphi(0) = 0$
– $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$ *au voisinage de 0.*

Lemme.
Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tels que :

$$\forall A \in V, \qquad A = {}^t\phi(A) A_0 \phi(A)$$

Démonstration. On considère :

$$\begin{aligned} \varphi : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto {}^tM A_0 M \end{aligned}$$

φ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour $H \in M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) &= {}^t H A_0 + A_0 H + {}^t H A_0 H \\ &= {}^t(A_0 H) + A_0 H + o\left(\|H\|^2\right)\end{aligned}$$

D'où :

$$D\varphi(I_n).H = {}^t(A_0 H) + A_0 H$$

$D\varphi(I_n)$ est surjective car, pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, on a :

$$D\varphi(I_n).\left(\frac{1}{2}A_0^{-1}A\right) = A$$

Par ailleurs :

$$\ker D\varphi(I_n) = \{H \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_0 H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$$

Or $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc, si on pose $F := \{H \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_0 H \in S_n(\mathbb{R})\}$, on a :

$$M_n(\mathbb{R}) = F \oplus \ker D\varphi(I_n)$$

et $I_n \in F$.
Soit $\psi : F \to S_n(\mathbb{R})$ la restriction de φ à F. Alors $D\psi(I_n)$ est bijective car :

$$\ker D\phi(I_n) \cap F = \{0\} = \ker D\psi(I_n)$$

Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I_n dans F (que l'on peut supposer inclus dans l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$) tel que ψ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $V := \psi(U)$.
V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I_n)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et :

$$\forall A \in V, \qquad A = {}^t\psi^{-1}(A) A_0 \psi^{-1}(A)$$

D'où le résultat en posant $\phi := \psi^{-1}$. $\square$

Démonstration du lemme de Morse. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 s'écrit au voisinage de 0 :

$$f(x) - f(0) = {}^t x Q(x) x$$

où $Q(x)$ est la matrice symétrique suivante :

$$Q(x) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx) \, \mathrm{d}t$$

et Q est de classe $\mathcal{C}^1$.
De plus, $Q(0) \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ donc d'après le lemme, il existe $M(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ avec M de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 telle que :

$$Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x)$$

D'où, en posant $y := M(x)x$,

$$f(x) - f(0) = {}^t y Q(0) y$$

Or $Q(0) = \dfrac{1}{2} D^2 f(0)$ est de signature $(p, n-p)$, donc par la loi d'inertie de Sylvester, il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que, si on pose $u := A^{-1}y$, on ait :

$$\begin{aligned} {}^t y Q(0) y &= {}^t u \, {}^t A Q(0) A u \\ &= u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2 \end{aligned}$$

Enfin, $x \mapsto u = A^{-1}M(x)x$ a pour différentielle à l'origine $A^{-1}M(0) \in GL_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème d'inversion locale, c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$. $\square$