Théorème de Hahn-Banach analytique en dimension infinie

2013-2014

Référence : Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999, p.1.

Théorème.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall x \in E, \forall \lambda > 0$

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E.$

Soit G un sous-espace vectoriel de E, soit $g : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que pour tout $x \in G, g(x) \leq p(x)$.
Alors il existe $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire qui prolonge g et telle que pour tout $x \in E, f(x) \leq p(x)$.

Lemme (Zorn)**.**
Tout ensemble ordonné, inductif et non vide admet un élément maximal.

Démonstration du théorème. On considère :

$$P := \{h \mid h : D(h) \subset E \to \mathbb{R} \text{ avec } D(h) \text{ sev de } E, h \text{ linéaire}, G \subset D(h), \\ h \text{ prolonge } g \text{ et } \forall x \in D(h), h(x) \leq p(x)\}$$

On munit P de la relation d'ordre :

$$h_1 \leq h_2 \iff D(h_1) \subset D(h_2) \text{ et } h_2 \text{ prolonge } h_1.$$

$P \neq \varnothing$ car $g \in P$.
P est inductif : soit $Q \subset P$ un sous-ensemble totalement ordonné, on note $Q = (h_i)_{i \in I}$, on définit $D(h) := \bigcup_{i \in I} D(h_i)$ et $h(x) := h_i(x)$ si $x \in D(h_i)$.
Alors h est un majorant de Q.
D'après le lemme de Zorn, P possède un élément maximal f.
Prouvons que $D(f) = E$:
Supposons que $D(f) \neq E$ et soit $x_0 \notin D(f)$, on pose $D(h) := D(f) + \mathbb{R}x_0$ et :

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \qquad \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R}$$

pour un certain α, le but étant que $h \in P$.
On doit donc avoir :

$$f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0) \qquad \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R}.$$

i.e.

$$\begin{cases} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) & \forall x \in D(f) \\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_0) \end{cases}$$

par (i).
Il suffit donc de choisir α tel que :

$$\sup_{y \in D(f)} (f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} (p(x + x_0) - f(x))$$

Ceci est possible car :

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &\leq p(x + y) \\ &\leq p(x + x_0) + p(y - x_0) \end{aligned}$$

Donc $f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x) \qquad \forall x, y \in D(f)$.
Ainsi, $h \in P$ et $f \leq h, f \neq h$, on obtient une contradiction. □

Corollaire.
Soit E un espace vectoriel normé, G un sous-espace vectoriel de E.
Soit $g : G \to \mathbb{R}$ linéaire et continue.
Alors il existe $f \in E'$ prolongeant g et telle que $\|f\| = \|g\|$.

Démonstration. On pose $p(x) := \|g\|\|x\|$, les hypothèses du théorème sont bien vérifiées et on a $|f(x)| \leq \|g\|\|x\|$, d'où $\|f\| \leq \|g\|$, d'où $\|f\| = \|g\|$ car f prolonge g. □

Corollaire.
Pour tout $x \in E$, il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\| = \|x_0\|$ et $\langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$.

Démonstration. Appliquer le corollaire avec $G := \mathbb{R}x_0$ et $g(tx_0) := t\|x_0\|^2$, de sorte que $\|g\| = \|x_0\|$. □

Corollaire.
Pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|$$

Démonstration. Soit $x \neq 0$, alors :

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|$$

et, par le corollaire précédent, il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\| = \|x\|$ et $\langle f_0, x \rangle = \|x\|^2$.
On pose $f_1 := \frac{f_0}{\|x\|}$, on a $\|f_1\| = 1$ et $\langle f_1, x \rangle = \|x\|$. □