

# Sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$ .

2013 – 2014

Référence : Felix Ulmer, *Théorie des groupes*, Ellipses, 2012, p.138.

## **Théorème.**

Tout sous-groupe fini de  $SO(3)$  est isomorphe à l'un des groupes suivants :  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $D_n$ ,  $\mathfrak{A}_4$ ,  $\mathfrak{S}_4$ ,  $\mathfrak{A}_5$ .

*Démonstration.* Soit  $G$  un tel groupe d'ordre  $n \geq 2$ ,  $G$  agit sur  $\mathbb{S}^2$ . Un élément de  $G \setminus \{\text{id}\}$  est une rotation axiale donc possède 2 points fixes pour cette action, appelés pôles. On note  $X$  l'ensemble des pôles d'éléments de  $G \setminus \{\text{id}\}$ , on a  $2 \leq |X| \leq 2(n-1)$ .

$X$  est stable par  $G$  car si  $x$  est un pôle de  $g$ , alors  $h(x)$  est un pôle de  $hgh^{-1}$ . Par ailleurs, si  $x \in X$ , le stabilisateur  $G_x$  de  $x$  est, par restriction à  $\text{vect}(x)^\perp$ , un sous-groupe fini de  $SO(2)$  donc est cyclique.

On considère l'action de  $G$  sur  $X$ , alors si  $r$  désigne le nombre d'orbites, la formule des classes donne

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \frac{1}{n} (|X| + 2(n-1))$$

et puisque  $2 \leq |X| \leq 2(n-1)$ , on obtient  $r = 2$  ou  $3$ .

Supposons qu'il y ait deux orbites. Alors la formule des classes donne

$$2 = \frac{1}{n} (|X_1| + |X_2| + 2(n-1)),$$

d'où  $|X_1| + |X_2| = 2$ , *i.e.*  $|X_1| = |X_2| = 1$ . Il y a donc un pôle dans chaque orbite et donc tous les éléments de  $G \setminus \{\text{id}\}$  admettent le même axe de rotation, donc  $G$  est cyclique.

Supposons désormais qu'il y ait trois orbites. En notant  $n_i$  le cardinal du stabilisateur d'un élément d'une orbite  $X_i$ , on a d'une part  $n_i \geq 2$  et d'autre part la formule des classes donne

$$3 = \frac{1}{n} \left( \frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2} + \frac{n}{n_3} + 2(n-1) \right),$$

d'où

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{n}.$$

On en déduit  $\frac{3}{n_1} > 1$ , d'où  $n_1 = 2$ . D'où

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}. \quad (1)$$

Par conséquent,  $\frac{2}{n_2} > \frac{1}{2}$  et donc  $n_2 = 2$  ou  $3$ .

Si  $n_2 = 2$ , alors  $\frac{1}{n_3} = \frac{2}{n}$  et donc  $n_3 = \frac{n}{2}$  et  $n$  est pair. Si  $n_2 = 3$ , alors  $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{n}$ , d'où  $\frac{1}{n_3} > \frac{1}{6}$ , donc  $n_3 \in \{3, 4, 5\}$ .

En résumé, la relation (1) donne les cas suivants :

1.  $n_1 = n_2 = 2, n_3 = \frac{n}{2}$ .
2.  $n_1 = 2, n_2 = n_3 = 3$ , alors  $n = 12$ .
3.  $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 4$ , alors  $n = 24$ .
4.  $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5$ , alors  $n = 60$ .

Identifions la structure de  $G$  dans chacun des cas :

1. Si  $n = 4$ , alors  $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  ou  $G \simeq D_2$ .  
Supposons  $n \neq 4$ . Soit  $z \in X_3$  et  $x \in X_1$ , alors  $x \neq -z$  car  $G_z = G_{-z}$  et  $|G_x| \neq |G_z|$  ( $n \neq 4$ ).  $G_z$  est cyclique d'ordre  $\frac{n}{2}$ , soit  $g$  un générateur de  $G_z$ . Considérons  $P := (g^i(x))_{0 \leq i \leq \frac{n}{2}-1}$ , alors  $x$  n'est pas fixé par une rotation de  $G_z$  donc  $P$  forme un polygone régulier à  $\frac{n}{2}$  côtés et  $|X_1| = \frac{n}{2}$  donc  $P = X_1$ .  $G$  agit sur  $P$  donc par égalité des cardinaux,  $G \simeq D_{n/2}$ .
2. L'action de  $G$  sur  $X_2$  est fidèle car  $|X_2| = 4$  et seule l'identité a un plan de points fixes dans  $SO(3)$ . D'où un morphisme injectif  $G \rightarrow \mathfrak{S}_4$  et par cardinalité,  $G \simeq \mathfrak{A}_4$ .
3. On a  $|X_2| = 8$  et si  $z \in X_2$ , alors  $-z \in X_2$  car  $|G_z| = |G_{-z}|$  et les orbites sont de cardinaux distincts.  $G$  permute donc les paires de points opposés de  $X_2$ , ce qui induit un morphisme  $\varphi : G \rightarrow \mathfrak{S}_4$ . Supposons que  $\varphi$  ne soit pas injectif et soit  $g \in \ker \varphi$  non trivial. Alors  $g$  laisse stable les paires donc  $g^2$  admet tout  $X_2$  comme points fixes et donc  $g^2 = \text{id}$ . Par ailleurs, les deux points fixes  $c$  et  $-c$  de  $g$  ne sont pas dans  $X_2$  car les stabilisateurs d'éléments de  $X_2$  sont d'ordre divisant 3, donc si  $z \in X_2$ ,  $g(z) = -z$ . Soit  $h \in G$ , alors  $hgh^{-1} \in \ker \varphi$  est non trivial et donc  $g$  et  $hgh^{-1}$  ont même restriction à  $X_2$  et donc  $hgh^{-1}g^{-1}$  a 8 points fixes, donc  $g = hgh^{-1}$ . Or les points fixes de  $hgh^{-1}$  sont  $h(c)$  et  $h(-c)$  donc  $\{c, -c\}$  est stable par  $G$ . Ceci n'est pas possible car il n'y a pas d'orbite de cardinal 2. Par conséquent,  $\varphi$  est injectif et par cardinalité,  $G \simeq \mathfrak{S}_4$ .
4. On a  $|X_1| = 30$  et  $n_1 = 2$ ,  $|X_2| = 20$  et  $n_2 = 3$ ,  $|X_3| = 12$  et  $n_3 = 5$ . Les pôles opposés appartenant à la même orbite, les 30 pôles de  $X_1$  fournissent 15 axes de rotation distincts et donc 15 sous-groupes d'ordre 2 qui sont conjugués entre eux comme stabilisateurs d'éléments d'une même orbite. On obtient de même 10 sous-groupes d'ordre 3 conjugués et 6 sous-groupes d'ordre 5 conjugués. Montrons alors que  $G$  est simple. Soit  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$  non trivial et distinct de  $G$ . Si  $5 \mid |H|$ ,  $H$  contient les 24 éléments d'ordre 5 car il est distingué, donc  $|H| = 30$  et donc

$H$  contient aussi les 15 éléments d'ordre 2, ce qui n'est pas possible. Si  $2 \mid |H|$ , alors  $H$  contient les 15 éléments d'ordre 2 donc  $|H| \geq 16$ , donc  $H \in \{20, 30\}$ , donc  $5 \mid |H|$  ce qui n'est pas possible. Finalement  $|H| = 3$ , or  $H$  doit contenir les 20 éléments d'ordre 3, ce qui n'est pas possible. Donc  $G$  est simple et  $|G| = 60$  donc  $G \simeq \mathfrak{A}_5$ .

□