

Loi de réciprocité quadratique.

2013 – 2014

Il s'agit ici de démontrer la loi de réciprocité quadratique :

Théorème.

Si p et q sont deux nombres premiers impairs distincts, alors

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right).$$

On commence par deux résultats préliminaires.

Définition. Soit A un anneau commutatif. On appelle polynôme de Laurent toute fraction rationnelle de la forme $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i \in A(X)$ telle que les a_i soient presque tous nuls. Les polynômes de Laurent forment un sous-anneau de $A(X)$.

Proposition.

Tout polynôme de Laurent de la forme $P := \sum_{i=-n}^n a_i X^i$ avec $a_{-i} = a_i$ pour tout i et $a_n \neq 0$ s'écrit de manière unique sous la forme $Q(X + \frac{1}{X})$ avec $Q \in A[X]$ de degré n .

Démonstration. Si $Q = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$ avec $b_n \neq 0$, alors $Q(X + \frac{1}{X}) = b_n X^{-n} + \dots + b_n X^n$ où les monômes dans les \dots ont un exposant compris entre $-(n-1)$ et $n-1$. On en déduit que si Q est non nul, alors $Q(X + \frac{1}{X})$ aussi, ce qui montre l'unicité de Q .

Montrons l'existence de Q par récurrence sur n .

Si $P = a_0$, $Q := a_0$ convient.

Supposons le résultat connu pour des polynômes de Laurent faisant intervenir des exposants compris entre $-(n-1)$ et $n-1$. Soit $P := \sum_{i=-n}^n a_i X^i$ avec $a_{-i} = a_i$ et $a_n \neq 0$. Le polynôme de Laurent $P - a_n(X + \frac{1}{X})^n$ a des coefficients symétriques donc, par hypothèse de récurrence, il existe $R \in A[X]$ de degré inférieur à $n-1$ tel que $P - a_n(X + \frac{1}{X})^n = R(X + \frac{1}{X})$. Le polynôme $Q := R + a_n X^n$ vérifie $P = Q(X + \frac{1}{X})$ et est de degré n . \square

Proposition.

Pour p un nombre premier impair, on note $V_p \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme de degré $\frac{p-1}{2}$

tel que

$$V_p \left(X + \frac{1}{X} \right) = \sum_{i=-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} X^i.$$

Son existence et son unicité sont garanties par la proposition précédente.

Si q est un autre nombre premier impair distinct de p , alors

$$\left(\frac{q}{p} \right) = \text{Res}(V_p, V_q).$$

Démonstration. Montrons que ces deux quantités sont congrues modulo p . Pour cela, établissons d'abord que V_p est congru à $(X - 2)^{\frac{p-1}{2}}$ modulo p .

V_p étant unitaire, un représentant $\overline{V_p}$ de la classe de V_p dans $\mathbb{F}_p[X]$ est un polynôme unitaire de degré $\frac{p-1}{2}$. Pour montrer que $\overline{V_p} = (X - 2)^{\frac{p-1}{2}}$, il suffit de montrer que si K est un corps de décomposition de $\overline{V_p}$ sur \mathbb{F}_p , alors 2 est l'unique racine de $\overline{V_p}$ dans K .

Soit $x \in K$ tel que $\overline{V_p}(x) = 0$. Dans une certaine extension L de K , il existe ζ tel que $x = \zeta + \frac{1}{\zeta}$ (ζ vérifie $\zeta^2 - x\zeta + 1 = 0$). On a alors

$$\overline{V_p}(x) = \overline{V_p} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = \sum_{i=-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \zeta^i = 0.$$

D'où

$$\sum_{i=0}^{p-1} \zeta^i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \zeta^i = 0,$$

d'où $\zeta^p - 1 = 0$. On en déduit $(\zeta - 1)^p = 0$ et donc $\zeta = 1$ et $x = 2$.

La réduction modulo p de $\text{Res}(V_p, V_q)$ donne

$$\begin{aligned} \overline{\text{Res}(V_p, V_q)} &= \text{Res}(\overline{V_p}, \overline{V_q}) \\ &= \overline{V_q}(2)^{\frac{p-1}{2}} \\ &= q^{\frac{p-1}{2}} \\ &= \left(\frac{q}{p} \right) \end{aligned}$$

dans \mathbb{F}_p .

Il reste à montrer que $\text{Res}(V_p, V_q)$ est égal à ± 1 . Pour cela, il suffit de montrer que pour tout nombre premier l , l ne divise pas $\text{Res}(V_p, V_q)$, c'est-à-dire que V_p et V_q n'ont pas de racine commune dans une extension finie K de \mathbb{F}_l .

Soit $x \in K$ une racine commune de V_p et V_q dans K . Comme précédemment, on peut écrire $x = \zeta + \frac{1}{\zeta}$ avec ζ appartenant à une extension L de K . $V_p(x) = 0$ donc $\zeta^p = 1$ et $V_q(x) = 0$ donc $\zeta^q = 1$. Or p et q sont premiers entre eux donc

$\zeta = 1$. Quitte à échanger les rôles de p et q , on peut supposer que $p \neq l$, on a alors

$$V_p(x) = \sum_{i=-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \zeta^i = p \neq 0$$

dans \mathbb{F}_l .

□

Par la formule $\text{Res}(V_q, V_p) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \text{Res}(V_p, V_q)$, on en déduit la loi de réciprocité quadratique.