206 – Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

2013 – 2014

Question.

Pourquoi l'enveloppe convexe d'un compact est compacte ?

Réponse.

Soit C un compact d'un espace vectoriel de dimension n, alors

$$\mathrm{Conv}(C) = \{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, x_i \in C\}$$

par le théorème de Carathéodory. Alors si on pose

$$\Delta_{n+1} := \{(\lambda_i) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\},$$

Δ_n est compact et l'application

$$\begin{aligned} f : \Delta_{n+1} \times C^{n+1} &\longrightarrow \mathrm{Conv}(C) \\ ((\lambda_i), (x_i)) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{aligned}$$

est continue et surjective, d'où le résultat.

Question.

Montrer la convergence des itérées dans le théorème de point fixe dans le cas d'une application strictement 1-lipschitzienne sur un compact.

Réponse.

On montre d'abord que f admet un unique point fixe : l'application $x \mapsto d(x, f(x))$ est continue sur un compact donc admet un minimum m atteint en a. Si $m > 0$, alors $f(a) \neq a$ et

$$d(f(a), f^2(a)) < d(a, f(a)) = m,$$

ce qui contredit la minimalité de m. Donc $m = 0$ et $f(a) = a$. De plus, ce point fixe est unique car si $b = f(b)$ avec $a \neq b$, on a

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) < d(a, b).$$

On considère maintenant la suite $u_n := d(f^n(x_0), a)$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante :

$$u_{n+1} = d(f^{n+1}(x_0), a) = d(f^{n+1}(x_0), f(a)) < d(f^n(x_0), a).$$

On considère l'ensemble

$$X := \{(x, y) \mid d(x, y) \geq \varepsilon\},$$

X est compact. $(x, y) \mapsto \frac{d(f(x),f(y))}{d(x,y)}$ est continue sur X donc admet un maximum sur X, qui est inférieur strictement à 1. Donc f est contractante sur X et, en appliquant le théorème de Picard, si $(f^n(x_0), a) \in X$ pour tout n, alors $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a l'unique point fixe de f, ce qui est absurde. Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(f^n(x_0), a) < \varepsilon$, et donc pour $m > n$, $d(f^m(x_0), a) < d(f^n(x_0), a) < \varepsilon$. Ceci prouve la convergence de la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ vers a.

Question.

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Réponse.

On considère l'ensemble $I := \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x\}$. Alors $I \neq \varnothing$ car $1 \in I$.

I est borné donc admet une borne inférieure a. Pour $x \in I$, on a alors $x \geq a$ et donc $f(x) \geq f(a)$ car f est croissante, d'où $x \geq f(a)$ pour tout $x \in I$. On en déduit que $f(a)$ est un minorant de I, donc $f(a) \leq a$. On en déduit $f^2(a) \leq f(a)$ et donc que $f(a) \in I$, d'où $a \leq f(a)$ par définition de a.

Donc $a = f(a)$ est un point fixe de f.