Théorème de Weierstrass.

2013 – 2014

Référence : Claude Zuily, Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2006, p.518.

Théorème.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ *une fonction continue. On pose*

$$\omega(h) := \sup\{|f(u) - f(v)|, |u - v| \leq h\}$$

son module de continuité.
On considère

$$B_n(f,x) = B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

le $n^{\text{ième}}$ *polynôme de Bernstein de* f.
Alors

(i) (B_n) *converge uniformément vers* f *sur* $[0,1]$.

(ii) $\|f - B_n\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *où* C *est une constante.*

(iii) L'estimation (ii) *est optimale : il existe* f *lipschitzienne telle que* $\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ *pour une constante* $\delta > 0$.

Notons que $(ii) \Rightarrow (i)$ *directement.*

Démonstration. (ii) Soit $x \in [0,1]$ et $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli i.i.d de paramètre x. On note $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.
On a alors

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(x) \text{ et } \mathbb{E}(f(x)) = f(x)$$

par théorème de transport, d'où

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &= \left|\mathbb{E}\left(f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right) \\ &\leq \mathbb{E}\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right). \end{aligned}$$

Montrons que $\omega(\lambda h) \leq (\lambda+1)\omega(h)$:
ω est croissante et $\omega(h+k) \leq \omega(h)+\omega(k)$ donc, par récurrence, $\omega(nh) \leq n\omega(h)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}, \omega(\lambda h) \leq \omega(\lceil\lambda\rceil h) \leq \lceil\lambda\rceil\omega(h) \leq (\lambda+1)\omega(h)$.
On en déduit

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| &\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\mathbb{E}\left(\sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right| + 1\right) \\
&= \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_1\right) \\
&\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2\right)
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder. Or

$$\begin{aligned}
\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2^2 &= \mathbb{E}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|^2\right) \\
&= \mathrm{Var}\left(x - \frac{S_n}{n}\right) + \left(\mathbb{E}\left(x - \frac{S_n}{n}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^2}nx(1-x) + \left(x - \frac{1}{n}nx\right)^2 \\
&= \frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| &\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) \\
&\leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

D'où $\|f - B_n\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

(iii) On pose $f : x \mapsto \left|x - \frac{1}{2}\right|$, on a $\omega(h) \leq h$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\|f - B_n\|_\infty &\geq \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\
&= \left|B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\
&= \mathbb{E}\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \\
&= \frac{1}{2n}\mathbb{E}|2S_n - n|.
\end{aligned}$$

D'où $\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{1}{2n}\mathbb{E}|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n|$ avec $\varepsilon_j := 2X_j - 1$ variables de Rademacher i.i.d. D'où

$$\begin{aligned}\|f - B_n\|_\infty &\geq \frac{1}{2n}\|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n\|_1 \\ &\geq \frac{1}{2n\sqrt{e}}\|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n\|_2\end{aligned}$$

par inégalité de Khintchine.
Or $\|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n\|_2^2 = \mathrm{Var}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) + (\mathbb{E}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n))^2 = n$. D'où

$$\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{1}{2\sqrt{ne}} \geq \frac{1}{2\sqrt{e}}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

□

Détails supplémentaires

Proposition (Inégalité de Khintchine)**.**
*Soit $r_1, \ldots, r_n$ des variables de Rademacher (*i.e. *valant ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$) i.i.d. Soit $f \in vect_{\mathbb{R}}(r_1, \ldots, r_n)$.*
Alors $\|f\|_2 \leq \sqrt{e}\mathbb{E}(|f|)$.

Démonstration. On a $f = \sum_j a_j r_j$ et on peut supposer $\|f\|_2^2 = 1 = \sum_j a_j^2$.
Posons $g := \prod_{j=1}^n (1 + ia_j r_j)$. Alors pour presque tout x,

$$\begin{aligned}|g(x)| &= \prod_{j=1}^n \sqrt{1 + a_j^2 r_j^2(x)} \\ &= \prod_{j=1}^n \sqrt{1 + a_j^2} \\ &\leq \prod_{j=1}^n \sqrt{\exp(a_j^2)} \\ &= \sqrt{\exp\left(\sum a_j^2\right)} \\ &= \sqrt{e}.\end{aligned}$$

D'où $\|g\|_\infty \leq \sqrt{e}$.

De plus, si $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(r_j g) &= \mathbb{E}\left(r_j(1 + ia_j r_j) \prod_{k \neq j} (1 + ia_k r_k) \right) \\
&= \mathbb{E}(r_j(1 + ia_j r_j))\mathbb{E}\left(\prod_{k \neq j} (1 + ia_k r_k) \right) \text{ par indépendance des } r_j \\
&= \mathbb{E}(r_j(1 + ia_j r_j)) \prod_{k \neq j} \mathbb{E}(1 + ia_k r_k) \\
&= ia_j \text{ car } \mathbb{E}(r_j) = 0.
\end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}(fg) = \sum_{j=1}^n a_j \mathbb{E}(r_j g)$, d'où $|\mathbb{E}(fg)| = \left| i \sum_{j=1}^n a_j^2 \right| = 1$.
Or

$$\|f\|_1 \geq \frac{|\mathbb{E}(fg)|}{\|g\|_\infty} \geq \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$\square$