207 – Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Question.

Soit E un espace de Banach et $x \in E$ non nul. Trouver $\varphi \in E'$ tel que $\varphi(x) = \|x\|$ et $\|\varphi\| = 1$.

Réponse.

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{vect}(x) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda x &\longmapsto \lambda \|x\| \end{aligned}$$

appartient à E', donc par le théorème de Hahn-Banach il existe $\varphi \in E'$ tel que $\varphi_{|\mathrm{vect}(x)} = \phi$ et $\|\varphi\| = \|\phi\| = 1$.

Question.

Soit

$$\begin{aligned} j : E &\longrightarrow E'' \\ x &\longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(x)). \end{aligned}$$

Montrer que j est une isométrie sur E''.

Réponse.

Soit $x \in E$ et $\varphi \in E'$, on a

$$|j(x)(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\|$$

donc $\|j(x)\| \leq \|x\|$.
Par ailleurs, il existe $\varphi \in E'$ tel que $\varphi(x) = \|x\|$ et $\|\varphi\| = 1$, on a alors $|j(x)(\varphi)| = \|x\|$, donc $\|j(x)\| \geq \|x\|$.
Finalement, $\|j(x)\| = \|x\|$.

Question.

Le théorème de Borel affirme que pour toute suite $(a_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ il existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{(k)}(0) = a_k$ pour tout k. Peut-on remplacer $\mathcal{C}^\infty$ par analytique ?

Réponse.

Non : on définit $a_k := k!^2$ et on pose $u(x) = \sum u_k x^k$. Alors $u^{(k)}(0) = u_k k!$ donc si $u^{(k)}(0) = a_k$, alors $u_k = k!$ donc u a un rayon de convergence nul.

Question.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ paire. Existe-t'il $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = g(x^2)$?

Réponse.

On commence par montrer qu'il existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que la fonction $v : x \mapsto f(x) - u(x^2)$ vérifie $v^{(k)}(0) = 0$ pour tout k.
Une fonction v définie de la sorte est paire, donc $v^{(2k+1)}(0) = 0$ pour tout k. Par ailleurs, on peut montrer par récurrence que $v^{(2k)}(x)$ s'exprime sous la forme

$$f^{(2k)}(x) - \sum_{i=0}^{k} a_i u^{(k+i)}(x^2) x^{2i}$$

avec $a_i \neq 0$ (on a exactement $v^{(2k)}(x) = f^{(2k)}(x) - (2k)! \sum_{i=0}^{k} \frac{2^{2i}}{(2i)!(k-i)!} u^{(k+i)}(x^2)x^{2i}$) donc les $u^{(k)}(0)$ s'expriment en fonction des $f^{(2k)}(0)$ et des $v^{(2k)}(0)$ ($u^{(k)}(0) = f^{(2k)}(0) - \frac{k!}{(2k)!} v^{(2k)}(0)$). Finalement, en prenant une fonction u vérifiant $u^{(k)}(0) = f^{(2k)}(0)$ (dont l'existence est assurée par le théorème de Borel), on obtient ce qu'on veut.
On pose $w : x \mapsto v(\sqrt{|x|})$. Alors $w^{(k)}$ s'écrit comme une somme de termes de la forme $\frac{v(\sqrt{|x|})}{|x|^\alpha}$, donc $\lim_{x \to 0} w^{(k)}(x) = 0$ car $v(x) = o(x^k)$ pour tout k par l'inégalité de Taylor-Lagrange. On en déduit que w est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il suffit alors de poser $g := w + u$.

Question.

Soit f et g deux fonctions analytiques telles que $fg(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f ou g est nulle.

Réponse.

Pour tout $z, f(z) = 0$ ou $g(z) = 0$ donc une des deux a un zéro non isolé, donc une des deux est nulle.

Question.

Que peut-on dire d'une fonction continue sur $\bar{D}(0,1)$, holomorphe sur $D(0,1)$ et nulle sur $\{|z|=1\}$?

Réponse.

Elle est nulle sur $\bar{D}(0,1)$ par le principe du maximum.

Question.

Et si on suppose qu'elle est seulement nulle sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1 \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$?

Réponse.

Alors $z \mapsto f(z)f(-z)$ vérifie les conditions de la question précédente donc est nulle sur $\bar{D}(0,1)$, et donc f est nulle sur $\bar{D}(0,1)$ par ce qui a été fait précédemment.