125 – Extensions de corps. Exemples et applications.

2013 – 2014

Question.

Quels sont les automorphismes de $\mathbb{C}$ stables sur $\mathbb{R}$?

Réponse.

L'identité et la conjugaison.

Question.

Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 2 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ pour p impair ?

Réponse.

$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique d'ordre pair, il y a donc un seul élément d'ordre 2 : -1.

Question.

Soit L/k une extension finie avec L de caractéristique 0, on note $\bar{k}$ la clotûre algébrique de k. Donner les morphismes de corps $\varphi : L \to \bar{k}$ k-linéaires.

Réponse.

Par le théorème de l'élément primitif, L est engendré par un élément α, il suffit alors de connaître l'image de α par φ. Or α est algébrique donc annulé par un polynôme $P \in k[X]$, donc $P(\varphi(\alpha)) = \varphi(P(\alpha))$ et donc $P(\alpha)$ est une racine de P.

Par ailleurs, P est à racines simples car irréductible donc premier avec sa dérivée. Soit $\beta \in \bar{k}$ une racine de P, on définit $\varphi : k[X] \to \bar{k}$ l'application évaluation en β, le noyau de φ est (P) donc on obtient un morphisme $\bar{\varphi}$: $k[X]/(P) \to \bar{k}$ tel que $\bar{\varphi}(X) = \beta$, et on a $k[X]/(P) \simeq k(\alpha)$.

Question.

Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ les morphismes définis précédemment par les racines de P, les conjugués de α sont les $\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha)$. Soit $x \in L$, montrer que $S_x := \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \in k$.

Réponse.

S_α est la somme des racines, donc correspond au coefficient devant X^{n-1} de P.

On considère $\psi_x : L \to L$ l'application multiplication par x pour $x \in L$.

On commence par considérer ψ_α. La matrice de cette application dans la base canonique de L sur k comme k-ev est la matrice compagnon de P. On a alors $\mathrm{tr}(\psi_\alpha) = S_\alpha$ et les valeurs propres de ψ_α sont les $\varphi_i(\alpha)$.

Soit $x \in L$, on écrit $x = Q(\alpha)$ avec $Q \in k[X]$. On a alors $\psi_x = Q(\psi_\alpha)$, et donc les valeurs propres de ψ_x sont les $Q(\varphi_i(\alpha))$. La trace de ψ_x est donc la somme de ses valeurs propres, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^n Q(\varphi_k(\alpha)) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(Q(\alpha)) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) = S_x$. On a donc $S_x = \mathrm{tr}(\psi_x) \in k$.

Question.

Montrer que $\prod_{k=1}^n \varphi_k(x) \in k$.

Réponse.

$\det(\psi_x) = \prod_{k=1}^n Q(\varphi_k(\alpha)) = \prod_{k=1}^n \varphi_k(x)$ d'où le résultat.

Question.

Montrer que la famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ est $\bar{k}$-linéairement indépendante.

Réponse.

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \bar{k}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i = 0$.

Alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(\alpha^k) = 0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(\alpha)^k$ pour tout k. Or les $\varphi_i(\alpha)$ sont distincts donc le système de Vandermonde est inversible, donc $\lambda_i = 0$ pour tout i.

Question.

On définit $\operatorname{tr}(x) := \operatorname{tr}(\varphi_x)$ pour $x \in L$. Montrer que $(x, y) \mapsto \operatorname{tr}(xy)$ est k-bilinéaire non dégénérée sur L.

Réponse.

La k-bilinéarité est claire. Soit $x \in L$ tels que $\operatorname{tr}(xy) = 0$ pour tout $y \in L$. On a

$$\operatorname{tr}(xy) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\varphi_i(y)$$

donc par la question précédente, $\varphi_i(y) = 0$ pour tout i, donc $y = 0$.