

Ellipse de Steiner* et aire d'un polygone

Leçons 181, 182

Salim Rostam

11 juillet 2014

1 Existence et unicité de l'ellipse de Steiner

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème. *Tout triangle non plat possède une unique ellipse tritangente en chacun des milieux des côtés.*

Définition. *Cette unique ellipse est l'ellipse de Steiner du triangle.*

1.1 Démonstration dans le cas équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral. L'existence de l'ellipse de Steiner est assurée par le cercle inscrit car le centre du cercle inscrit (qui assure la tangence simultanée) est également celui du cercle circonscrit (qui assure la tangence en les milieux) coïncident ; voir figure 1.

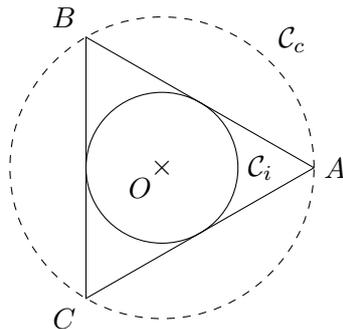


FIGURE 1 – Cercle inscrit à un triangle équilatéral

Reste donc à prouver l'unicité ; pour cela, soit \mathcal{E} une ellipse tritangente à ABC en chaque milieu et montrons que $\mathcal{E} = C_i$. Quitte à translater et

*Jakob Steiner, 18 mars 1796 (Utzenstorf, Suisse) - 1^{er} mars 1863 (Berne, Suisse).

tourner le repère, on peut supposer que \mathcal{E} est centrée et que son grand axe coïncide avec l'axe des abscisses : voir la figure 2 (note ¹).

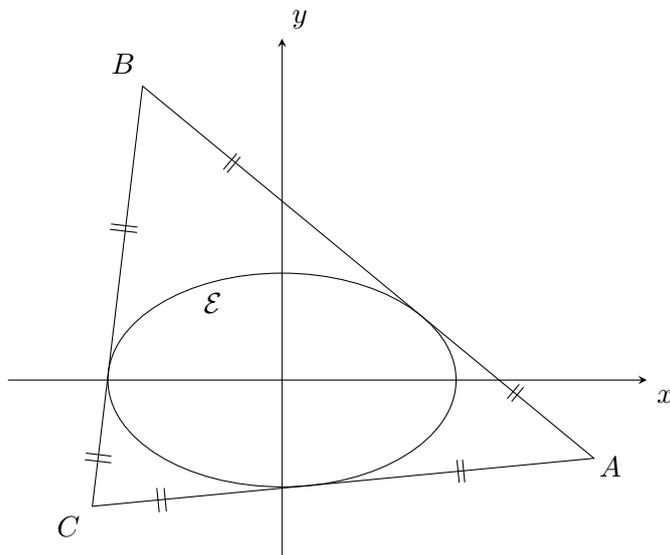


FIGURE 2 – Ellipse tritangente en les « milieux » des cotés d'un triangle « équilatéral »

On compose alors avec l'application $f : (x, y) \mapsto (\lambda x, y)$ avec $\lambda > 0$ choisi de telle sorte que $f(\mathcal{E}) =: \mathcal{C}$ soit un cercle. Or, l'application f est affine donc :

- conserve les barycentres donc \mathcal{C} est dans l'enveloppe convexe de $A'B'C'$ (où le prime désigne l'image par f) ;
- est différentiable donc conserve la tangence ², donc \mathcal{C} est tangente aux cotés de $A'B'C'$;
- conserve les milieux donc \mathcal{C} est tritangent en les milieux des cotés du triangle $A'B'C'$.

Autrement dit, le cercle \mathcal{C} est le cercle inscrit au triangle $A'B'C'$, et de plus les points de tangence sont les milieux des cotés ; la situation est décrite dans la figure 3. (Remarquons que comme $\det f = \lambda > 0$, le triangle $A'B'C'$ reste bien direct.)

On constate alors que les triangles rectangles $OA'F$ et $OA'H$ vérifient $OF = OH$ (car \mathcal{C} est un cercle!) donc on en déduit que $A'F = A'H$ (par exemple par le théorème de Pythagore :-). Ainsi, comme la tangence se fait en les milieux on en déduit que $A'B' = A'C'$; en faisant cela pour le segment

1. Pour se faire une idée de la situation, le dessin est forcément faux à cause du théorème!

2. C'est simplement dire que si $v = \gamma'(0)$ est tangent en a alors $Df(a)v = (f \circ \gamma)'(0)$; comme f est affine, si $v = \overrightarrow{AB}$ et si ϕ_f désigne la partie linéaire de f on a $Df(a)v = \phi_f(v) = \phi_f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$, qui est donc tangent en $(f \circ \gamma)(0) = f(a)$.

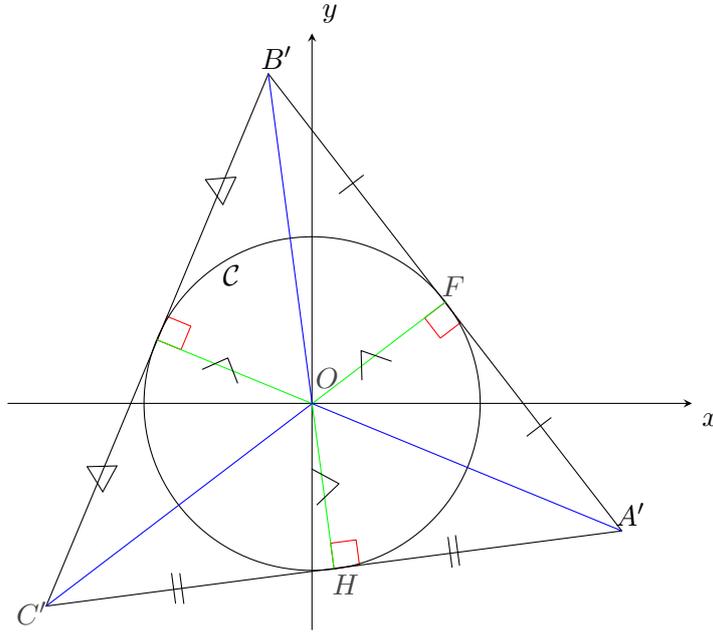


FIGURE 3 – Après transformation par f

[OC'] on en déduit de la même manière que $A'C' = B'C'$ et donc finalement que $A'B'C'$ est équilatéral.

Montrons à présent que f est l'identité. En notant les affixes par des lettres minuscules, avec $z := e^{\frac{i\pi}{3}}$ on a, les triangles ABC et $A'B'C'$ étant équilatéraux directs :

$$\begin{aligned} c - a &= z(b - a) \\ c' - a' &= z(b' - a') \end{aligned}$$

donc avec $\beta := c - a$ et $\gamma := b - a$ on a $\beta = z\gamma$ et $\beta' = z\gamma'$. En écrivant $\beta = \beta_x + i\beta_y$ et $\gamma = \gamma_x + i\gamma_y$ on obtient :

$$\begin{aligned} \beta_x + i\beta_y &= z(\gamma_x + i\gamma_y) \\ \lambda\beta_x + i\beta_y &= z(\lambda\gamma_x + i\gamma_y) \end{aligned}$$

donc en soustrayant les deux équations on obtient $(1 - \lambda)\beta_x = (1 - \lambda)z\gamma_x$. Or, comme $z \notin \mathbb{R}$ on a nécessairement $(1 - \lambda)\beta_x = 0 = (1 - \lambda)\gamma_x$. Ainsi, si $\lambda \neq 1$ alors $\beta_x = \gamma_x = 0$, *i.e.* les points A , B et C ont la même abscisse ce qui est absurde car le triangle ABC est équilatéral! Ainsi, $\lambda = 1$ et donc $f = \text{id}$ et $\mathcal{E} = \mathcal{C}$ est donc le cercle inscrit au triangle $A'B'C'$, qui n'est rien d'autre que le triangle ABC . C'est ce que l'on voulait montrer !

1.2 Démonstration dans le cas quelconque

On utilise un peu le même raisonnement que précédemment, en considérant cette fois une application affine f qui envoie un triangle équilatéral T_0 sur le triangle T . En utilisant le fait que l'image par f d'une conique est une conique (f est un changement de coordonnées affines + équation cartésienne d'une conique) et qu'une ellipse est compacte donc l'image par f d'une ellipse est une ellipse (car f est continue), on montre que le théorème se généralise immédiatement aux triangles quelconques (voir figure 4).

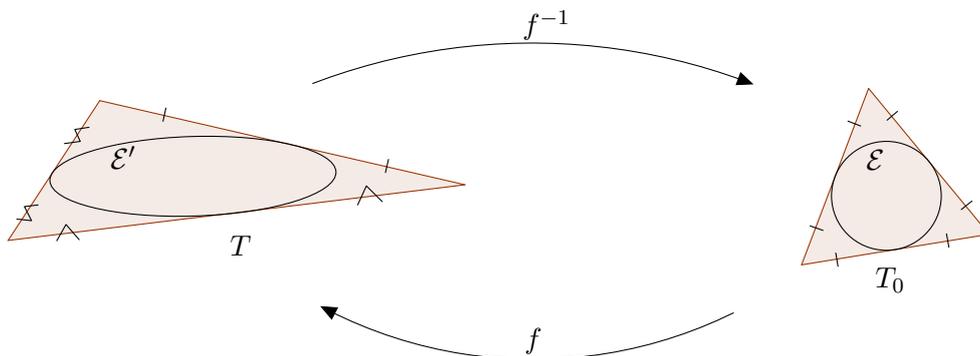


FIGURE 4 – Transfert du théorème

2 Aire d'un polygone étoilé

2.1 Aire d'un triangle

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant.

Théorème. Soit T un triangle, de sommets d'affixe a , b et c . Alors l'aire de T est donnée par $\frac{1}{2}|\operatorname{Im}(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a})|$.

Pour cela, on va se baser encore sur le principe de la figure 4 ; si T_0 est le triangle de sommets 1 , j et j^2 (avec $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$) et si l'application affine f envoie les sommets de T_0 sur ceux de T , par exemple $f(1) = a$, $f(j) = b$ et $f(j^2) = c$ alors on a $\operatorname{aire}(T) = \operatorname{aire}(f(T_0)) = |\det f| \operatorname{aire}(T_0)$. Il ne reste donc plus qu'à calculer ces deux termes !

2.1.1 Calcul de l'aire de T_0

D'après la figure 5, on a $\operatorname{aire}(T_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (c'était la partie facile :-).

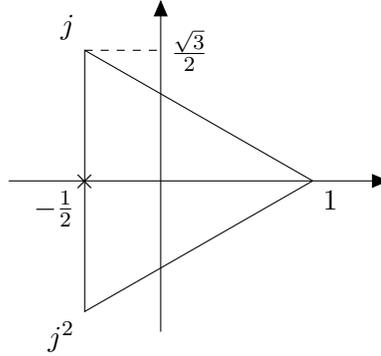


FIGURE 5 – Triangle T_0

2.1.2 Calcul du déterminant de f

Remarquons que l'on peut écrire f sous la forme $f(z) = Az + B\bar{z} + C$ avec $A, B, C \in \mathbb{C}$. En effet, la matrice de la partie linéaire de f dans la base $(1, i)$ s'écrit alors $\begin{pmatrix} A_x + B_x & B_y - A_y \\ A_y + B_y & A_x - B_x \end{pmatrix}$ et l'on vérifie que l'on peut atteindre n'importe quelle matrice (réelle) de taille 2.

On cherche donc A, B et C tels que :

$$\begin{cases} A + B + C = a & (1) \\ Aj + Bj^2 + C = b & (2) \\ Aj^2 + Bj + C = c & (3) \end{cases}$$

— En faisant (1) + (2) + (3) on trouve $C = \frac{a+b+c}{3}$.

— En faisant (1) + $j(2)$ + $j^2(3)$ on trouve $B = \frac{a+jb+j^2c}{3}$.

— En faisant (1) + $j^2(2)$ + $j(3)$ on trouve $A = \frac{a+j^2b+jc}{3}$.

En réutilisant la forme matricielle de f précédente, on a $\det f = (A_x + B_x)(A_x - B_x) - (A_y + B_y)(B_y - A_y) = A_x^2 - B_x^2 + A_y^2 - B_y^2 = |A|^2 - |B|^2$. On est donc prêt à calculer $\det f$! On a :

$$\det f = |A|^2 - |B|^2 = \frac{1}{3^2} \left[|a + j^2b + jc|^2 - |a + jb + j^2c|^2 \right]$$

donc comme les termes carrés se simplifient il reste ³ :

$$\begin{aligned} \det f &= \frac{2}{3^2} \left[\langle a, (j^2 - j)b \rangle + \langle a, (j - j^2)c \rangle + \langle j^2b, jc \rangle - \langle jb, j^2c \rangle \right] \\ &= \frac{2}{3^2} \left[\langle a\bar{b} - a\bar{c}, j^2 - j \rangle + \langle b\bar{c}, j^2 - j \rangle \right] \end{aligned}$$

3. On rappelle que si $z, z' \in \mathbb{C}$, $\langle z, z' \rangle := \operatorname{Re}(\bar{z}z')$ et que l'adjoint est alors le conjugué ; en outre, $(1, i)$ est une base orthonormale donc $\langle z, i \rangle$ n'est rien d'autre que $\operatorname{Im} z$.

Comme $j^2 - j = \bar{j} - j = -2i \operatorname{Im} j = -i\sqrt{3}$ on obtient alors :

$$\det f = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \langle a\bar{b} - a\bar{c} + b\bar{c}, i \rangle = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{Im}(a\bar{b} + b\bar{c} - a\bar{c})$$

et comme $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}$ on en déduit que $\det f = \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{Im}(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a)$.

2.1.3 Conclusion

Finalement, on obtient donc que $\operatorname{aire}(T) = \frac{2}{3\sqrt{3}} |\operatorname{Im}(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a)| \times \frac{3\sqrt{3}}{4}$ donc $\operatorname{aire}(T) = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a)|$ ce qui est la formule demandée.

Remarque. En fait, on obtient également que le triangle T est direct si et seulement si $\operatorname{Im}(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a) > 0$ puisqu'alors $\det f > 0$.

2.2 Généralisation à un polygone étoilé

Soit P un polygone ; on dira ici qu'il est *étoilé* si la partie bornée du plan délimitée par les cotés de P est étoilée⁴.

Théorème. Soit P un polygone étoilé, de sommets d'affixe a_1, \dots, a_n ($n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$) tel que :

- les cotés de P sont les segments $[a_k, a_{k+1}]$ (où l'on a posé $a_{n+1} := a_1$) ;
- aucun a_l n'est dans un $]a_k, a_{k+1}[$.

Alors l'aire de P est donnée par $\frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\sum_{k=1}^n \bar{a}_k a_{k+1})|$.

La démonstration repose sur la figure 6. L'aire de P étant la somme des aires des triangles roses⁵, d'après la formule dans un triangle direct on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{aire}(P) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{a}_k a_{k+1} + \bar{a}_{k+1} a + \bar{a} a_k) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n \bar{a}_k a_{k+1} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\left(\sum_{k=1}^n \bar{a}_k \right) a + \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \bar{a} \right] \end{aligned}$$

Or, pour $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $\bar{z}z' + z\bar{z}' \in \mathbb{R}$ donc sa partie imaginaire est nulle, donc on obtient finalement $\operatorname{aire}(P) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\sum_{k=1}^n \bar{a}_k a_{k+1})$ qui est la formule annoncée.

4. Attention, il existe une notion de polygone étoilé qui n'est pas celle-là.

5. C'est bien le cas d'après notre hypothèse sur P ; en particulier, si l'un des triangles n'est pas inclus dans la partie \bar{P} bornée délimitée par P alors un point M du triangle n'est pas dans \bar{P} ; comme \bar{P} est étoilé, tout $[AM) \setminus [AM[$ est inclus dans \bar{P}^c ce qui est absurde car cet ensemble contient un point d'un $[a_k, a_{k+1}]$.

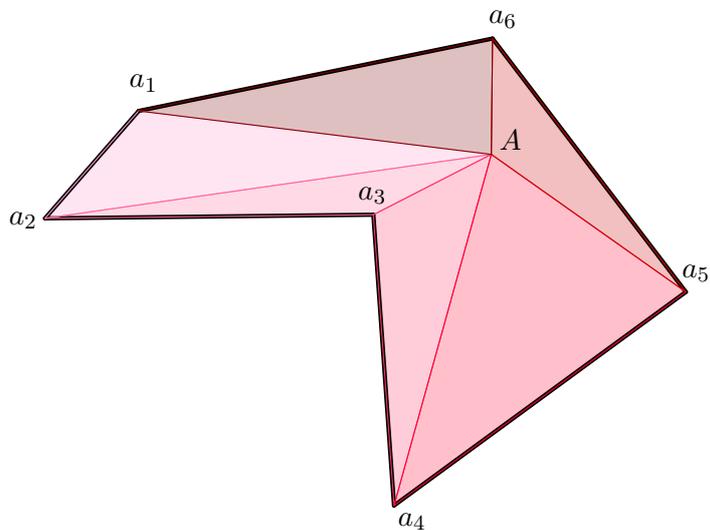


FIGURE 6 – Retour au triangle

Références

- [1] CALDERO Philippe et GERMONI Jérôme, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*. Calvage & Mounet, 2012.
- [2] MINDA David et PHELPS Steve, *Triangles, Ellipses, and Cubic Polynomials*. American Mathematical Monthly, Vol 115, n° 8 October 2008, p. 684-685.