208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

I) Espaces Vectoriels Normés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (e.v.) avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1) Norme sur un espace vectoriel

Définition 1 : Une application $\|\cdot\|$ est dite une norme sur E si elle vérifie :

* $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$
* $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
* $\forall x, y \in E$, $\quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

On appelle espace vectoriel normé (e.v.n.), un e.v. muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Exemples 2 : * $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ avec $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

* $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ avec $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1])$
* $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ avec $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$

Définition 3 : Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont dites équivalentes sur E si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :
$\forall x \in E$, $\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$

Corollaire 4 : Deux normes équivalentes induisent deux topologies équivalentes.

2) Dimension finie

Propriété 5 : Si $\dim(E) < +\infty$ alors toutes les normes sur E sont équivalentes. C'est faux en dimension infinie.

Exemples 6 : * $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$

* Sur $\mathcal{C}^0([0,1])$, si on pose $f_n : x \longmapsto \begin{cases} 1-nx & \text{si } x \in [0,1/n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

alors $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}^0([0,1])$.

Propriété 7 : * Les sous-e.v. de dimension fini d'un espace de dimension quelconque sont fermés.

* Les compacts sont exactement les fermés bornés.

Théorème 8 : Théorème de Riesz : E est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée est compacte.

II) Applications Continues

Définition 9 : On appelle $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications continues de E dans F. On pose $E' = \mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})$ appelé **le dual topologique** de E.

Théorème 10 : Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ linéaire. On a alors équivalence entre :

i) f est continue sur E
ii) f est continue en 0
iii) f est borné sur la boule unité de E
iv) $\exists M > 0 \setminus \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$ $\forall x \in E$
v) f est lipschitzienne $(\exists M > 0 \ \|f(x) - f(y)\|_F \leq M \|x-y\|_E \ \forall x, y \in E)$
vi) f est uniformément continue sur E

GOURDON

Théorème 11 : Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \to \mathbb{R}$ linéaire. Alors f est continue ($f \in E'$) si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé.

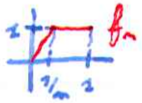
GOURDON p.54

Exemples 12 : * $\forall a \in \mathbb{R}$, $\varphi_a : (\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto f(a)$ est continue $\Rightarrow \varphi_a \in \mathcal{C}^0([0,1])'$

* $I : (\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt$ $\quad \in \mathcal{C}^0([0,1])'$
* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$ $\quad \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

Propriété 13 : Si $\dim(E) < +\infty$ alors toute application linéaire de E dans F est continue. C'est faux en dimension ∞.

Exemple 14 : $D : (\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$
$f \longmapsto f'$
n'est pas continue. Soit $f_n : x \longmapsto \begin{cases} nx & \text{sur } [0, 1/n] \\ 1 & \text{sur } [1/n, 1] \end{cases}$



$\left.\begin{array}{l} \|f_n\|_\infty = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \|f_n'\|_\infty = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists M > 0$ tel que $\|f_n'\|_\infty \leq M \|f_n\|_\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

Définition 15 : On appelle norme d'opérateur l'application
$|||\cdot||| : \mathcal{L}_c(E,F) \longrightarrow \mathbb{R}$
$f \longmapsto \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$
$(\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$ est un e.v.n.

Exemple 16 : * Soit H un espace de Hilbert. Alors $\forall g \in H$
$|||\varphi_g : f \longmapsto \langle f, g \rangle||| = \|g\|_H$.

* Soit M = $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_n(\mathbb{K})$.
Soit $\varphi : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$
$x \longmapsto Mx$
alors $|||\varphi||| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i|$

Propriété 17 : Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$. Alors $f \circ g \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et $|||f \circ g||| \leq |||f||| \times |||g|||$.

Application 18 : $\forall f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, la somme $\sum_{k \geq 0}^{+\infty} \frac{f^k}{k!}$ converge.

III) Espaces de Banach

Définition 19 : $(E, \|\cdot\|_E)$ est dit espace de Banach si E est un e.v.n. complet pour la métrique associée à $\|\cdot\|_E$.

Exemple 20 : * $(\mathcal{C}^{0,\alpha}([0,1]), \|\cdot\|)$ est complet pour la norme $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{\substack{x,y \in [0,1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \quad \forall f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}([0,1])$

* $(M_n(\mathbb{R}), |||\cdot|||)$ est complet
* $(W^{1,p}, \|\cdot\|_{W^{1,p}})$ est complet $\forall p \in \mathbb{N}^*$ pour la norme
$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_p + \|f'\|_p \quad \forall f \in W^{1,p}$

Propriété 21 : Si $\dim(E) < +\infty$ alors E est un espace de Banach. Ce n'est plus vrai si $\dim(E) = +\infty$.

Exemple 22 : $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|)$ avec $\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\| = \max_{k \in [\![0,n]\!]} |a_k|$ n'est pas complet.
Soit $P_n(x) = \frac{1}{n} x^n$ alors $(P_n)_n$ est de Cauchy car
$\|P_{n+p}(x) - P_n(x)\| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$ mais $(P_n)_n$ ne converge pas dans $\mathbb{K}[X]$.

Propriété 23 : Si F est un espace de Banach alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ est aussi un espace de Banach. E' est donc tout le temps un espace de Banach.

Lemme 24 : Soit X un espace métrique complet et $(X_n)_n$ une suite de fermés tels que $\mathrm{Int}(X_n) = \emptyset \ \forall n \geq 1$. Alors $\mathrm{Int}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n\right) = \emptyset$. (Lemme de Baire)

Théorème 25 : Théorème de Banach-Steinhaus : Soient E et F deux Banach, Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{L}_c(E,F)$ telle que $\forall x \in E$, $\sup_{i \in I} \|T_i x\|_F < +\infty$. Alors $\sup |||T_i||| < +\infty$.

D V P
BREZIS p.15

Application 26 : * Soit E un espace de Banach **admettant** une base B. Alors soit B est fini soit B est indénombrable.
GOURDON p.393

* Il existe une fonction f **continue** telle que sa série de Fourier **diverge**.
GOURDON p.399

Brezis p. 83

* Soit $(T_n)_n \in \mathcal{L}_c(E,F)^{\mathbb{N}}$ avec E et F deux espaces de Banach. On suppose que $\forall x \in E$, $(T_n(x))_n$ converge vers une limite notée Tx. Alors $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

<u>Théorème 27:</u> Théorème du point fixe de Banach:
Soient E un espace de Banach et f une application k-contractante de E dans E. Alors f admet un unique point fixe x_0 dans E.

<u>Application 28:</u> Théorème de Cauchy-Lipschitz : Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times E$ et $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, E)$. Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable alors l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \quad (t_0,x_0)\in\Omega \end{cases}$$

admet une unique solution maximale.

Brezis p. 1-3

D
V
P

<u>Théorème 29 :</u> Théorème de Hahn-Banach Analytique :
Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :
* $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in E$ et $\forall \lambda > 0$
* $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$

Soit G un sous-e.v. de E et $g : G \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G$

Alors il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g et telle que $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$.

<u>Corollaire 30 :</u> Soit G un sous-e.v. de E et $g \in \mathcal{L}_c(G,\mathbb{R})$. Alors $\exists f \in \mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})$ telle que $|||f||| = |||g|||$.

IV.) Les espaces de Hilbert

<u>Définition 31 :</u> Soit H un e.v., si H est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot,\cdot\rangle$ et est complet pour la norme induite par le produit scalaire alors H est appelé un espace de Hilbert.

<u>Exemples 32 :</u> * $(L^2([0,1]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ avec $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$ $\forall f,g \in L^2([0,1])$.
* $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ avec $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

<u>Théorème 33 :</u> Soit H un espace de Hilbert et $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors $\forall f \in H$, $\exists!\, u \in K$ tel que :

$$|f-u| = \min_{v\in K} |f-v|$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K \text{ et } \langle f-u, v-u\rangle \leq 0 \quad \forall v \in K$$

On note $u = P_K(f)$.

<u>Corollaire 34 :</u> Soit $F \subset H$ un sous-e.v. fermé. Soit $f \in H$ alors $u = P_F(f)$ est caractérisé par :

$$u \in K \text{ et } \langle f-u, v\rangle = 0 \quad \forall v \in K$$

De plus, P_K est une application linéaire.

<u>Théorème 35 :</u> Soit H un espace de Hilbert et $\varphi \in H'$ alors $\exists f \in H$ telle que $\varphi(x) = \langle f, x\rangle \quad \forall x \in H$.
De plus, $|||\varphi||| = \|f\|_H$.

Lorsque H est un espace de Hilbert on peut donc l'identifier à son dual topologique.

Brezis p. 78-82

Références :

* X. Gourdon – Analyse
* H. Brézis – Analyse Fonctionnelle
* Le cours sur les e.v.n qu'on a eu (Quasiment tout ce qui n'est pas référencé vient de là)