140

Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications

Cadre : $\mathbb{K}$ désigne un corps (commutatif) quelconque

I. Le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$

1/ Structure de corps et d'algèbre de $\mathbb{K}(X)$ [RDO § 7.1.1]

Thm / Def 1 : L'anneau $\mathbb{K}[X]$ étant intègre, on définit le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$ comme étant $\mathrm{Frac}(\mathbb{K}[X])$. Plus précisément, $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} / \mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence définie par $(A_1, B_1)\, \mathcal{R}\, (A_2, B_2) \iff A_1 B_2 = A_2 B_1$. On note A_1 / B_1 la classe de (A_1, B_1).

Prop 2 : Muni des lois $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}$ et $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$, $\mathbb{K}(X)$ est un corps dont le neutre additif, noté 0, est la classe de $(0, 1)$, et le neutre multiplicatif, noté 1, la classe de $(1, 1)$.

Prop 3 : 1/ $\mathbb{K} \times \mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}(X)$, $(\alpha, P/Q) \mapsto \frac{\alpha P}{Q}$ munit $\mathbb{K}(X)$ d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre

2/ $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}(X)$, $P \mapsto \frac{P}{1}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre injectif.

Thm 4 : Soit $\mathbb{K}'$ un corps et $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ un isomorphisme. Alors il existe un unique isomorphisme de $\mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}'(Y)$ prolongeant φ et envoyant X sur Y.

2/ Propriétés algébriques [RDO § 7.1.3, 7.1.2 et 7.1.4]

Prop / Def 5 : Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Alors l'élément $\deg A - \deg B \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ est indépendant du choix des représentants (A, B) de F. On l'appelle le degré F, noté $\deg F$.

Prop 6 : Soient $F, F' \in \mathbb{K}(X)$. Alors $\deg FF' = \deg F + \deg F'$ et $\deg(F+F') \leqslant \max(\deg F, \deg F')$.

Appl. 7 : $\mathbb{K}(X)$ n'est pas algébriquement clos : [TAU Cor 13.1.4]
$T^2 - X \in \mathbb{K}(X)[T]$ n'a pas de racine dans $\mathbb{K}(X)$ car $\forall F \in \mathbb{K}(X)$ $\deg F^2 \in 2\mathbb{Z}$ alors que $\deg X = 1$.

Thm / Def 8 : Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, il existe un représentant (A_1, B_1) de F, unique à constante multiplicative près, tel que A_1 et B_1 soient deux polynômes premiers entre eux. Ce représentant est appelé forme irréductible de F.

Def 9 (Pôles et racines) : Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ sous forme irréductible. On appelle pôle (resp. racine) de multiplicité k toute racine de B (resp. A).

Rmq 10 : Si $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est une extension de corps, $F \in \mathbb{K}(X)$ peut ne pas avoir de racine (resp pôle) alors que $F \in \mathbb{L}(X)$ en a.

Ex 11 : $F = \frac{1}{X^2+1} \in \mathbb{R}(X)$ n'a pas de pôle mais vu dans $\mathbb{C}(X)$ elle en a deux : i et $-i$.

Prop 12 : Les automorphismes de $\mathbb{K}$-algèbre de $\mathbb{K}(X)$ sont les applications $\mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}(X)$, $G \mapsto G\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ et $ad - bc \neq 0$ DVP n°1

3/ Dérivation [RDO § 7.1.6] et [LFA VII.6]

Def 13 : Soit $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction. On appelle dérivée de F, notée F', la fraction rationnelle $\frac{P'Q - QP'}{Q^2}$. On définit l'endomorphisme de dérivation D par : $D(F) = F'$.

Thm 14 : Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, $F' = 0$ si et seulement si F est constante.

C-Ex 15 : Pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$, $F = \frac{1}{X^p}$. Alors $F' = 0$. De façon plus générale, en caractéristique $p > 0$, on a :
$F' = 0$ si et seulement si il existe $G \in \mathbb{K}(X)$ telle que $F = G(X^p)$.

II Fonctions rationnelles

1/ Définition et propriétés [RDO § 7.1.5]

Def 16: Soit $F=\frac{P}{Q}\in K(X)$ sous forme irréductible. On note Δ_F le complémentaire dans K de l'ensemble des pôles de F. On appelle fonction rationnelle associée à F dans K l'application $\tilde{F}:\Delta_F\to K$ définie par $\tilde{F}(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Rmq 17: Si K est infini Δ_F aussi, si K est fini on peut avoir $\Delta_F=\emptyset$.

Ex 18: $K=\mathbb{F}_p$, $F=\frac{1}{X(X-1)\cdots(X-p+1)}\in\mathbb{F}_p(X)$. Alors $\Delta_F=\emptyset$.

Thm 19: On suppose K infini. Soient $F,G\in K(X)$ telles que $\tilde{F}_{|\Delta_F\cap\Delta_G}=\tilde{G}_{|\Delta_G\cap\Delta_F}$. Alors $F=G$.

C-Ex 20: $K=\mathbb{F}_p$, $F=\frac{1}{X^p}$ et $G=\frac{1}{X}$ alors $\tilde{F}=\tilde{G}$ sur K^*.

2/ Exemples d'utilisation [AUD exo VII.1] et [COTIB § 12.7]

Prop 21: Paramétrage rationnel des coniques : soit $\mathcal{C}$ une conique de $\mathbb{R}^2$ et $A\in\mathcal{C}$. La droite D_t de pente t passant par A rencontre $\mathcal{C}$ en un point π_t. Alors $t\mapsto\pi_t$ est un paramétrage de $\mathcal{C}$ rationnel.

Ex 22: $\mathcal{C}=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ et $A=(-1,0)$, on trouve $\pi_t=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)$

Appli 23: Les triplets Pythagoriciens (=solutions entières de $x^2+y^2=z^2$) sont les $(d(u^2-v^2),2duv,d(u^2+v^2))$, $d\in\mathbb{N}$ et $u\wedge v=1$.

Appli 24: L'équation diophantienne $x^3+y^3=xyz$ a pour solutions : $\{(uv^2,u^2v,u^3+v^3)\mid u\wedge v=1\ (u,v)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{N}^*\}\cup\{(x,-x,0),x\in\mathbb{Z}\}$.

III Décomposition en éléments simples

1/ Étude théorique [LFA § VII.2, VII.6]

soit $F=\frac{P}{Q}\in K(X)$ sous forme irréductible avec Q unitaire et soit $Q=\prod_{i=1}^{r}Q_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs irréductibles.

Thm 25: F s'écrit de manière unique sous forme $F=E+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{P_{i,j}}{Q_i^j}$ où $E\in K[X]$ et $\deg P_{i,j}<\deg Q_i$.

Def 26: E s'appelle la partie entière de F et $P_i=\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{P_{ij}}{(Q_i)^j}$ la partie polaire relative à $Q_i^{\alpha_i}$.

Rmq 27: Cela signifie que $\{X^n,n\geq 0\}\cup\{\frac{X^k}{P^l}$, P irréductible unitaire, $k<\deg P\}$ est une base de $K(X)$.

Appli 28 (Théorème de Lucas): Soit $P\in\mathbb{C}[X]\setminus\mathbb{C}$. Alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Ex 29: Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ ayant deux racines réelles distinctes et tel que P'' divise P. Alors les racines de P sont réelles (et simples).

Co 30: Si K est algébriquement clos, les parties polaires sont de la forme $\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{(X-a)^j}$. Si $K=\mathbb{R}$, elles sont de la forme $\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{(X-a)^j}$ ou de la forme $\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_jX+\gamma_j}{(X^2+pX+q)^j}$.

Appli 31: Primitives des fractions rationnelles : on se ramène au calcul des primitives des éléments simples.

Ex 32: $\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}$ a pour primitive $x\mapsto\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}+C$, $C\in\mathbb{R}$.

2/ Calcul pratique de la décomposition [LFA § VII 3 et 5] [RDO § 7.3.3]

Thm 33: Soient $F=\frac{P}{X^kQ}\in K(X)$ irréductible avec $Q(0)\neq 0$ et $P=(a_0+\dots+a_{k-1}X^{k-1})Q+X^kR$ la division de P par Q à l'ordre k selon les puissances croissantes. Alors $P_X(F)=\frac{a_0}{X^k}+\dots+\frac{a_{k-1}}{X}$.

Ex 34 $F=\frac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-1)^2}\in\mathbb{R}(X)$ alors $P_{X-1}(F)=\frac{2}{(X-1)^4}+\frac{8}{(X-1)^3}+\frac{29}{(X-1)^2}+\frac{31}{X-1}$

Prop 35: Si $F=\frac{P}{Q}$ a un pôle simple en a, $P_{X-a}=\frac{P(a)}{Q'(a)}\cdot\frac{1}{X-a}$.

Ex 36: $F=\frac{1}{X^4+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}+\frac{i}{X-i}-\frac{i}{X+i}\right)$, $K=\mathbb{C}$.

[TAU § 15.4] [X-ENS]

Rmq 37: Si $K=\mathbb{R}$, on peut déterminer les parties polaires $\sum_{i=1}^{m}\frac{\beta_i X+\gamma_i}{(X^2+pX+q)^i}$: on trouve β_m et γ_m en évaluant $(X^2+pX+q)^m F$ en une racine complexe de X^2+pX+q puis on itère le procédé sur $F-\frac{\beta_m X+\gamma_m}{(X^2+pX+q)^m}$.

3/ Résidus [TAU § 15.5 et 15.7] et [AMI § 8.4.2]

Def 38: Soit $F\in K(X)$ ayant un pôle α d'ordre m, de partie polaire $\frac{a_1}{X-\alpha}+\dots+\frac{a_m}{(X-\alpha)^m}$. Le résidu de F en α, noté $Res(F,\alpha)$ est $a_1\in K$.

Prop 39: On suppose K algébriquement clos.

i/ Si $\deg F<-1$ alors $\sum_{\alpha \text{ pôle}} Res(F,\alpha)=0$.

ii/ L'image de D (opérateur de dérivation) est l'ensemble des fractions dont tous les résidus sont nuls.

Prop 40: Si car $K=0$, $F\in K(X)$ telles que $P_{X-\alpha}(F)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda_k}{(X-\alpha)^{m-k}}$. Alors $\lambda_{m-1}=Res(F,\alpha)=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^m (X-\alpha)^m F}{dX^m}(\alpha)$.

Ex 41: Si $F=\frac{X^4+1}{X(X^2-1)^2}$ alors $Res(F,1)=0$.

Thm 42 (Résidus): Soit $F\in\mathbb{R}(X)$ sans pôle réel et telle que $\deg F\leq -2$. Notons $z_1,\dots,z_m$ les pôles de F de partie imaginaire strictement positive. Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,dt=2\pi i\sum_{k=1}^{m}Res(F,z_k).$$

Ex 43:
$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^6+1}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^6+1}=\pi i\left(-\frac{e^{i\pi/6}}{6}-\frac{e^{i\pi/2}}{6}-\frac{e^{i5\pi/6}}{6}\right)$$
$$=\frac{\pi}{3}$$

IV. Fractions rationnelles et séries formelles [RDO § 7.4.4] [LFA § VII.4]

Thm/Def 44: Soient $F\in K(X)$, $\frac{A}{B}$, $\frac{A_1}{B_1}$ deux représentants de F. S'il existe une série formelle $S\in K[[X]]$ telle que $A=B\cdot S$ alors on a aussi $A_1=B_1\cdot S$. On dit alors que S est le développement en série formelle de F.

Notation 45: On note $K(X)_0$ l'ensemble des fractions rationnelles dont zéro n'est pas un pôle.

Thm 46: $F\in K(X)$ est développable en série formelle si et seulement si $F\in K(X)_0$. Le développement est alors unique et son p-ième coefficient est le p-ième coefficient du quotient de A par B selon les puissances croissantes, où $F=\frac{A}{B}$ sous forme irréductible.

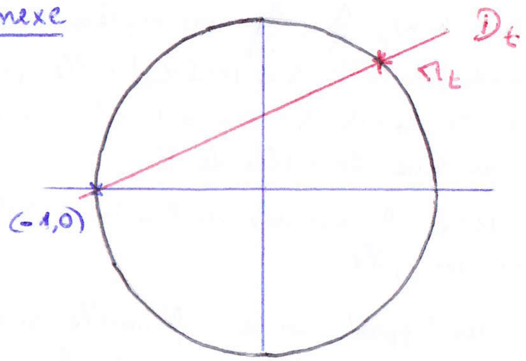
Cor 47: Il existe un unique morphisme de K-algèbre injectif $\varphi: K(X)_0\to K[[X]]$ prolongeant $K[X]\hookrightarrow K[[X]]$.

Ex 48: Si car $K=0$, $\frac{1}{(1-X)^p}$ est développable en série formelle :
$$\frac{1}{(1-X)^p}=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+p-1}{p-1}X^m.$$

Appl. 49: Partition d'un entier en parts fixées DVP n°2

Si $a_1,\dots,a_k$ sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble alors :
$$u_m=\#\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k \mid a_1x_1+\dots+a_kx_k=m\}\underset{\infty}{\sim}\frac{m^{k-1}}{(k-1)!}\frac{1}{a_1\cdots a_k}$$

Annexe



Paramétrisation rationnelle du cercle

Références :

- [RDO] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux - Cours de mathématiques spéciales, Tome 1, Algèbre
- [LFA] J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, Cours de mathématiques, Tome 1, Algèbre
- [TAU] P. Tauvel, Algèbre 2nd édition
- [AUD] M. Audin - Géométrie
- [COMB] F. Combes, Algèbre et géométrie
- [AM] E. Amar - E. Matheron, Analyse complexe
- [X-ENS] Oraux-X ENS Algèbre 1, 2nd édition