Systèmes formels du langage du 1^{er} ordre

Refs David-Nour-Raffalli

918

prérequis: syntaxe et sémantique de la logique du 1^{er} ordre

I Système formel

· L un langage

Un système formel ~~sur~~ L peut avoir 2 buts:

1. Étant donné une formule, vérifier si on peut la générer
2. Etablir l'ensemble des formules vérifiant une propriété.

Def 1: Un système formel est constitué:

→ d'axiomes

→ de règles d'inférence

Dans L, on se fixe une propriété sur les formules et si cet propriété est vérifiée par une formule, alors la formule est dite valide.

Def 2: Un système formel est:

- consistant s'il ne génère pas de formule non-valide.
- complet s'il génère exactement toute les formules valides.

exemple 3: L le langage sur $\{ab\}^*$ dans lequel les formules ont un et un seul b. Une formule est valide si elle a autant de "a" avant que après le "b".

Considérons le système formel:

axiomes: $\{b\}$

règle d'inférence: $\dfrac{\vdash \phi}{\vdash a\phi a}$

~~Ce~~ ~~par~~ Ce système est consistant et complet.

II Système formel et logique du premier ordre.

La propriété qu'on se fixe est la propriété de validité sémantique, i.e. il existe un modèle dans lequel la formule considérée s'évalue en "vraie"

1. Déduction naturelle.

La déduction naturelle est un type de systèmes formels proches du raisonnement mathématique.

Def 4: Un séquent est un couple $\Gamma \vdash F$ où

Γ est un ensemble fini de formules

F est une formule

$\Gamma \vdash F$ se lit "On déduit F à partir de Γ".

a) la logique classique (fin XIX)

$\vdash_c$

Def 5: Les règles de la logique classique sont:

axiome: $\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,ax$

inférence: $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\,aff$ $\quad \dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\,i_{\Rightarrow}$ $\quad \dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,e_{\Rightarrow}$

$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,i_{\wedge}$ $\quad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\,e_{\wedge g}$ $\quad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\,e_{\wedge d}$

$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,i_{\vee g}$ $\quad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\,i_{\vee d}$ $\quad \dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,e_{\vee}$

$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,i_{\neg}$ $\quad \dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\,e_{\neg}$

$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\bot_c$ (règle d'absurdité classique)

$$\frac{\Gamma\vdash A \quad x \text{ non-libre dans } \Gamma}{\Gamma\vdash\forall x A}\, i_\forall \qquad \frac{\Gamma\vdash\forall x A}{\Gamma\vdash A[x:=t]}\, e_\forall$$

$$\frac{\Gamma\vdash A[x:=t]}{\Gamma\vdash\exists x A}\, i_\exists \qquad \frac{\Gamma\vdash\exists x A \quad \Gamma, A\vdash C \quad x \text{ non-libre dans } \Gamma, C}{\Gamma\vdash C}\, e_\exists$$

exemple 6:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash A\wedge B\Rightarrow C}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash A}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma\vdash B}\,ax}{\Gamma\vdash A\wedge B}\,i_\wedge}{\Gamma := A\wedge B\Rightarrow C, A, B\vdash C}\,e_\Rightarrow}{A\wedge B\Rightarrow C, A\vdash B\Rightarrow C}\,i_\Rightarrow}{A\wedge B\Rightarrow C\vdash A\Rightarrow B\Rightarrow C}\,i_\Rightarrow}{\vdash((A\wedge B)\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow B\Rightarrow C)}\,i_\Rightarrow$$

[DEV] application: les involutions sont bijective.

b) La logique intuitionniste. (début XX, L.E.J Brouwer) $\vdash_i$

Cet deuxième système formel a pour but de générer des preuves constructive et donc d'exhiber des termes pour les variables quantifiées par $\exists$.

On remplace donc la règle d'absurdité classique par la règle: $\dfrac{\Gamma\vdash\bot}{\Gamma\vdash A}\,\bot_i$ d'absurdité intuitionniste.

Si par exemple on cherche à prouver $\Gamma\vdash\exists x F$, la règle $\bot_c$ nous demande de prouver que si F est faux pour tout x alors c'est absurde, cela ne nous exhibe pas de x. En revanche ici $\bot_i$ nous dit que tout les x marcherons.

2. Calcul des séquents

La notion de séquent est généralisée à $\Gamma\vdash\Delta$ où Γ et Δ sont des multi ensembles finis de formules.
avantages preuves plus automatique

a) logique LK $\vdash_{LK}$

C'est l'équivalent de la logique classique. Les règles se trouvent en annexe.

Thm 7: $\vdash_c \Leftrightarrow \vdash_{LK}$

b) logique LJ $\vdash_{LJ}$

On l'obtient grâce à LK en se restreignant à des multi-ensembles au plus de taille 1 à droite des séquents.

Thm 8: $\cancel{\vdash_i \Leftrightarrow \vdash_{LJ}}$ [DEV]
$(\Gamma\vdash_i F$ ssi $\Gamma\vdash_{LJ}\{F\})$ et $(\Gamma\vdash_i\bot \Leftrightarrow \Gamma\vdash_{LJ}\emptyset)$

c) Élimination de la coupure.

Thm 9: Dans LK et dans LJ, si $\Gamma\vdash\Delta$ alors il existe une dérivation sans coupure.

Une conséquence importante de ce théorème est:

Thm 10: LK et LJ sont consistants: il n'existe pas de dérivation de $\emptyset\vdash\emptyset$ (l'absurde)

3. Systèmes de Hilbert

Définitions 11: Un système de Hilbert est un couple d'axiomes $\mathcal{A}$ et de regles $\mathcal{R}$.

Soit Γ un ensemble de formule.

Une Γ-dérivation est une suite finie $A_1 \cdots A_n$ de formules telles que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ l'une des conditions suivantes est vérifiée:

- $A_i \in \mathcal{A}$ ou $A_i \in \Gamma$
- A_i est la conclusion d'une règle de $\mathcal{R}$ dont les prémisses appartiennent à $A_1, \dots, A_{i-1}$

Une formule A est Γ-dérivable s'il existe une Γ-dérivation se terminant par A, noté $\vdash_\Gamma A$

Une formule A est un théorème si elle est $\emptyset$-dérivable, noté $\vdash A$

exemple 12:

Axiomes

H_1: $A \Rightarrow B \Rightarrow A$

H_2: $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

H_3: $A \wedge B \Rightarrow A$

H_4: $A \wedge B \Rightarrow B$

H_5: $A \to B \Rightarrow A \wedge B$

H_6: $A \Rightarrow A \vee B$

H_7: $B \Rightarrow A \vee B$

H_8: $(A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$

H_9: $\neg A \Leftrightarrow (A \to \bot)$

H_{10}: $\bot \Rightarrow A$

H_{11}: $A \vee \neg A$

H_{12}: $A[x:=t] \Rightarrow \exists x A$

H_{13}: $\forall x A \Rightarrow A[x:=t]$

Règles

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}\Rightarrow \qquad \frac{C \Rightarrow A}{C \Rightarrow \forall x A}\forall \qquad \frac{A \Rightarrow C}{\exists x A \Rightarrow C}\exists$$

où x n'est pas libre dans C

Remarque 13: On note la forte ressemblance avec les logiques précédentes sauf que "les règles sont devenues des axiomes".

Thm 14: Soient Γ un ensemble de formules et A une formule

$$\vdash_\Gamma A \quad \text{ssi} \quad \Gamma \vdash_c A$$

Le but de ces systèmes est d'automatiser le raisonnement mathématique.

Savoir pourquoi, se recase dans d'autres leçons

III Automatisation: La résolution

Après avoir mis les formules sous formes de clauses on peut utiliser les règles (C_1, C_2 des clauses L_1, L_2 des littéraux)

$$\frac{C_1, L_1 \quad C_2, L_2 \quad \sigma = mgu(L_1, \overline{L_2})}{C_1[\sigma], C_2[\sigma]}\text{res} \qquad \frac{C_1, L_1, L_2 \quad \sigma = mgu(L_1, L_2)}{C_1[\sigma], L_1[\sigma]}\text{cont}$$

En mettant la négation de la formule F à prouver dans les clauses de départ, il suffit de résoudre la clause vide pour montrer F

Théorèmes de complétude ?
(ce qui est vrai admet une preuve)

Les formules valides sont RE
(car les preuves le sont)