

Soient $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{K} un corps et E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

I - Définitions et premiers résultats:

Def 1.1: On appelle forme linéaire une application linéaire de E dans \mathbb{K} .

Ex 1.2: i) Soit $a \in \mathbb{R}$. $ev_a: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$
 $P \mapsto P(a)$

ii) $tr: \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$
 $M \mapsto \text{tr}(M)$

iii) Soit K un intervalle compact de \mathbb{R} .
 $I: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$
 $P \mapsto \int_K P(x) dx$

Def 1.3: On appelle espace dual de E l'ensemble $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E .

Def 1.4: Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . On appelle base duale de (e_1, \dots, e_n) la famille (e_1^*, \dots, e_n^*) de E^* définie par:
 $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

Ex 1.5: Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Sa base duale est (e_1^*, \dots, e_n^*) telle que:
 $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \{1, \dots, n\}, e_i^*(x) = x_i$.

Prop 1.6: i) Soient (e_1, \dots, e_n) une base de E et (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale. Alors (e_1^*, \dots, e_n^*) est une base de E^* .
 ii) L'ensemble E^* est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

Def 1.7: Soit (e_1^*, \dots, e_n^*) une base de E^* . On appelle base antéduale de (e_1^*, \dots, e_n^*) la base (e_1, \dots, e_n) de E définie par:
 $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

Ex 1.8: Soient a_0, \dots, a_{n-1} $n+1$ points distincts de \mathbb{R} . Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ on définit $\varphi_i: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(a_i)$. Les $(\varphi_i)_{i=0, \dots, n}$ forment une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$. Alors la famille $(P_i)_{i=0, \dots, n}$ définie par: $\forall i \in \{0, \dots, n\}, P_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - a_j)}{(a_i - a_j)}$, et la base antéduale des $(\varphi_i)_{i=0, \dots, n}$.

Rmq: Il n'existe pas d'isomorphisme canonique entre E et E^* .

Thm 1.9: L'application $\phi: \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow (\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))^*$
 $A \mapsto (f_A: X \mapsto \text{tr}(AX))$
 est un isomorphisme.

Cor 1.10: Soit $f \in (\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))^*$ tq $\forall X, Y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), f(XY) = f(YX)$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tq pour tout $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) f(X) = \lambda \text{tr}(X)$.

Cor 1.11: Soit $n \geq 2$. Alors tout hyperplan de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ a une intersection différente de $\{0\}$ avec $GL_n(\mathbb{K})$.

Def 1.12: On appelle bidual de E le dual de E^* .

Ex 1.13: Soit $x \in E$. L'application ev_x définie par:
 $ev_x: E^* \rightarrow \mathbb{K}$
 $\mu \mapsto \mu(x)$
 appartient au bidual de E .

Prop 1.14: L'application $\varphi: E \rightarrow E^{**}, x \mapsto ev_x$ est un isomorphisme, appelé isomorphisme de bidualité.

II - Orthogonalité et transposition:

II-1. Orthogonalité:

Def 2.1: Soient $u \in E^*$ et $x \in E$. On dit que x et u sont orthogonaux si $u(x) = 0$.

Ex 2.2: $x-1$ et l'évaluation en 1 d'un polynôme sont orthogonaux.

Def 2.3: Soit F un sous-espace vectoriel de E . On appelle orthogonal de F l'ensemble F^\perp des formes linéaires qui s'annulent sur F .

Def 2.4: Soit G un sous-espace vectoriel de E^* . On appelle orthogonal de G l'ensemble G^\perp des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de G .

Prop 2.5: Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors:
 i) $(F^\perp)^\perp = F$, ii) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, iii) $F^\perp \cap G^\perp = (F \cap G)^\perp$

Rmq: La proposition 2.5 reste vraie pour F, G deux sous-espaces vectoriels de E^* .

Prop 2.6: Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors F^\perp est un sous-espace vectoriel de E^* et:

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$$

Prop 2.7: Soit G un sous-espace vectoriel de E^* . Alors G^\perp est un sous-espace vectoriel de E et:

$$\dim(G) + \dim(G^\perp) = \dim(E)$$

II-2. Transposition:

Def 2.8: Soient F un K -espace vectoriel de dimension finie et f une application linéaire de E dans F . On appelle transposée de f l'application notée ${}^t f$ définie par:

$${}^t f: F^* \rightarrow E^* \\ v \mapsto v \circ f$$

Prop 2.9: L'application ${}^t f$ est une application linéaire de F^* vers E^* .

Prop 2.10: L'application transposition: $f \mapsto {}^t f$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ vers $\mathcal{L}(F^*, E^*)$.

Prop 2.11: i) $\text{Ker}({}^t f) = (\text{Im}(f))^\perp$
 ii) $\text{Im}({}^t f) = (\text{Ker}(f))^\perp$

Prop 2.12: i) Si f est injective, ${}^t f$ est surjective.
 ii) Si f est surjective, ${}^t f$ est injective.

Prop 2.13: Soient $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale, $C = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F , $C^* = (f_1^*, \dots, f_m^*)$ sa base duale et $g \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit ${}^t g$ l'application transposée de g dans les bases B et C , alors:
 $\text{Mat}_{C^*}^{B^*}({}^t g) = {}^t \Pi$.

III - Application à la géométrie projective:

Def 3.1: On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Prop 3.2: L'application qui à toute forme linéaire associe son noyau induit une surjection de $E^* - \{0\}$ dans l'ensemble des hyperplans de E . Réciproquement, à tout hyperplan de E on peut associer une forme linéaire non-nulle.

Prop 3.3: On identifie l'ensemble des hyperplans de E à l'espace projectif de E^* , $P(E^*)$.

Def 3.4: On appelle plan projectif un plan affine complété par la droite à l'infini.

Def 3.5: On appelle birapport de quatre points A, B, C, D alignés la quantité:

$$[A, B, C, D] = \frac{CA}{CB} \times \frac{DB}{DA}$$

avec les conventions:
 i) $[A, \infty, B, C] = \frac{CA}{CB}$; $[A, B, \infty, C] = \frac{CB}{CA}$; $[A, B, C, \infty] = \frac{CA}{CB}$.

ii) $[A, A, B, C] = [A, B, A, C] = 1$; $[A, B, A, B] = [A, B, A, A] = 0$;

$$[B, A, A, B] = [A, A, B, B] = \infty.$$

Def 3.6: On appelle birapport de quatre droites A, B, C, D concourantes la quantité $[a, b, c, d]$, où a, b, c, d sont les points d'intersection respectifs de A, B, C, D avec une droite Δ .

Thm 3.7: Soit P un plan projectif. Alors:

Toute propriété de P faisant intervenir des relations d'intersection entre droites, et d'appartenance entre points et droites, reste vraie, si on la traduit en échangeant entre elles les expressions suivantes:

- i) point et droite
- ii) Le point a appartient à et la droite A contient le point d
- iii) le point d'intersection et la droite passant par deux points de deux droites
- iv) points alignés et droites concourantes
- v) birapport de quatre points alignés et birapport de quatre droites concourantes

Le nouvel énoncé obtenu est dit dual du précédent.

Ex 3.8: Théorème de Desargues

Soient deux triplets $a, b, c; a', b', c'$ de points tous distincts de P tels que les droites aa', bb', cc' soient distinctes. Alors:

Si ces droites concourent, les points d'intersection $ab'a'b', bc'b'c', ca'c'a'$ sont alignés.

Références:

- Algèbre Linéaire, Rémi Goltz
- Tout l'algèbre du 1^{er} cycle, Jean-Pierre Escaffier
- Algèbre Linéaire, cours et exercices, Henri Raudier
- Geométries affine, projective et euclidienne, Claude Tisseron
- Tout-en-un pour la Géométrie, LL, Jean-Pierre Ramis, André Warusfel
- Algèbre Linéaire, Jean-Charles Savioz

→ nef bloc par bloc

→ manque des

→ dessins sur la feuille
(\Rightarrow tableau on perd du temps)

La dualité d'inv aussi mb penser par ? 2.6 et 2.7 \Rightarrow 10 mⁿ

2.11 \Leftrightarrow 2.12.

↳ intérêt dualité / Proj

→ manque des ex - app

→ Poly interpo Lagr.

→ Taylor

→ différentielle

