153

Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction en dimension finie. Applications

Soit K un corps et E un K-ev de dim. finie.

I. Polynômes d'endomorphisme

1. L'algèbre $K[u]$

Def 1. Soit $P = \sum a_i X^i \in K[X]$. Alors $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, on note $P(u) = \sum a_i u^i$ et $P(u) \in \mathcal{L}(E)$.

(Gri) 161 **Def 2**: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère le morphisme d'évaluation $\varphi_u : K[X] \to \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(u)$. Alors l'algèbre des polynômes en u, notée $K[u]$, est $K[u] = \mathrm{Im}\varphi_u \subset \mathcal{L}(E)$.

Prop 3: $K[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Rq 4: $\mathrm{Ker}P(u)$ et $\mathrm{Im}P(u)$ sont stables par u $\forall P \in K[X]$.

Def-Prop 5: $\mathrm{Ker}\varphi_u$ est appelé idéal annulateur de u et il existe un unique $\pi_u \in K[X]$ unitaire tel que $\mathrm{Ker}\varphi_u = \langle \pi_u \rangle$. π_u est appelé polynôme minimal de u.

Prop 6: par théorème d'isomorphisme on a $K[u] \simeq K[X]/\langle \pi_u \rangle$ et, si $\pi_u = P_1 \dots P_r$, avec les P_i premiers entre eux deux à deux, alors $K[u] \simeq K[X]/\langle P_1 \rangle \times \dots \times K[X]/\langle P_r \rangle$.

Ex 7: si p projecteur non trivial, alors $\pi_p = X(X-1)$ et $K[p] \simeq K[X]/(X) \times K[X]/(X-1)$

(Gob) 232 **Prop 8**: $K[u]$ est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\deg(\pi_u)$ et de base $(id, u, \dots, u^{\deg(\pi_u)-1})$.

2. Polynômes annulateurs et propriétés de π_u

(Gri) 161 **Def 9**: on appelle polynôme annulateur de u tout $P \in K[X]$ tel que $P(u) = 0$, i.e. $P \in \mathrm{Ker}\varphi_u$.

Rq 10: P polynôme annulateur de u ssi $\pi_u | P$.

Appli 11: si $P(u) = 0$ et $P(0) \neq 0$, alors u est inversible et $u^{-1} \in K[u]$

Appli 12: calcul de puissance (par division euclidienne).

Prop 13: si $P(u) = 0$, alors $Sp(u) \subset \{\text{racines de } P\}$

Ex 14: • pour une symétrie non triviale, $s^2 = id$ donc $X^2 - 1$ annule s et $Sp(s) \subset \{-1, +1\}$

• pour u un nilpotent d'indice r, X^r annule u donc $Sp(u) \subset \{0\}$.

Rq 15: la réciproque est fausse. $P = X(X-1)$ annule id mais 0 n'est pas valeur propre.

Prop 16: si F sev de E stable par u alors $\pi_{u_{|F}} | \pi_u$

Prop 17: si $E = F_1 \oplus F_2$, avec F_1, F_2 stables par u, alors $\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_{u_{|F_1}}, \pi_{u_{|F_2}})$

(Gob) 242 **Prop 18**: deux endomorphismes semblables ont même polynôme minimal.

Rq 19: la réciproque est fausse. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\pi_A = (X-1)(X-2) = \pi_B$ mais A et B non semblables.

(Gri) 162 **Prop 20**: les valeurs propres de u sont exactement les racines de π_u.

Ex 21: • les valeurs propres d'un projecteur non trivial sont exactement 0 et 1.

3. Polynôme caractéristique

(Gou) 284 **Def 22** : soit $A \in M_n(K)$. Le polynôme caractéristique de A dans K est alors $\chi_A = \det(A - XI_n)$

Prop-def 23 : Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. On peut donc définir le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$, noté χ_u, comme celui de sa matrice dans n'importe quelle base.

Rq 24 : la réciproque est fausse ($A = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$)

Prop 25 : si F sev de E stable par u, alors $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$

Appli 26 : si λ valeur propre de u d'ordre de multiplicité m_λ dans χ_u, alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$.

Prop 27 : les valeurs propres de u sont les racines de χ_u

Appli 28 : si K algébriquement clos, $Sp_K(u) \neq \emptyset$

(Gri) 253 **Thm 29** (Cayley Hamilton)

$\chi_u(u) = 0$ (ie $\pi_u \mid \chi_u$, d'où $\deg \pi_u \leq \deg \chi_u = n$)

II. DIAGONALISATION

(Gou) 76 **Lemme 30** (des noyaux) : Soit $P \in K[X]$ décomposé en $P = Q_1 \cdots Q_n$ avec les Q_i premiers deux à deux entre eux. Alors $\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(Q_i(u))$

1. Critère de diagonalisabilité

(Gri) 164 **Thm 31** : On a équivalence entre :

i) u est diagonalisable

ii) $\exists P \in \ker \varphi_u$ scindé à racines simples

iii) π_u est scindé à racines simples

iv) χ_u est scindé et $\forall \lambda \in sp(u)$ $\dim(E_\lambda) = m_{\chi_u}(\lambda)$

Ex 32 :
- les projecteurs et les symétries sont diagonalisables
- les endomorphismes nilpotents ne sont pas diagonalisables

Appli 33 : Théorème de Burnside.

2. Applications de la diagonalisation

Appli 34 : calcul de puissances. Si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $A^k = PD^kP^{-1}$ et $D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$. Utile pour l'étude de suites récurrentes de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (Tn*)

Appli 35 : équations différentielles de la forme $X' = AX$ où $A \in M_n(K)$ est diagonalisable. Si $A = PDP^{-1}$ on se ramène à résoudre $Y' = DY$ où $Y = P^{-1}X$.

Déf 36 : Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on définit l'exponentielle de A par $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

Appli 36 : Si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$ et $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$

Appli 37 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $V_0 \in \mathbb{C}^n$. L'ensemble des solutions de $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(t_0) = V_0 \end{cases}$ a des solutions maximales définies sur $\mathbb{C}$ par $t \mapsto \exp(tA)V_0$

Prop 38 : $\exp(A) \in K[A]$.

Ex 39 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Si $A^2 = A$ alors $\exp(A) = I_n + (e-1)A$.

3. Cas des endomorphismes normaux

Dans cette partie, E désigne un espace euclidien.

Déf 40 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est normal si u et u^* commutent. Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite normale si M et ${}^tM$ commutent. (Gou) 288

Ex 41 : Les matrices diagonales, symétriques, antisymétriques sont des matrices normales.

Lorsque $M \in M_n(\mathbb{R})$, il est intéressant d'avoir une réduction de M dans $M_n(\mathbb{R})$. C'est le but de ce qui suit.

Thm 42 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que (Gou) 289

$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \tau_1 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$, où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

DVPT 1

Appli 43 : réduction des matrices symétriques et antisymétriques réelles

4. Généralisation : les endomorphismes semi-simples

(OA) 160 Def 44 : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si pour tout sev F de E, stable par u, il existe un supplémentaire de F stable par u.

Prop 45 : u est semi simple ssi Π_u est sans facteur carré.

Appli 46 : . si u diagonalisable, alors u semi-simple
. si K est algébriquement clos, alors semi-simple $\Leftrightarrow$ diagonalisable.

III TRIGONALISATION

1. Critères de trigonalisabilité

(OA) 166 Thm 47 : On a équivalence entre :

i) u est trigonalisable

ii) il existe un polynome annulateur de u scindé

iii) Π_u est scindé

iv) χ_u est scindé

Ex 48 : les endomorphismes nilpotents sont trigonalisables

Appli 49 : si K est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

2. Application de la trigonalisation

Appli 50 : Résolution d'un système $X' = AX$ avec A trigonalisable. (MX)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) / A = PTP^{-1}$. On pose $U = P^{-1}X$ et il suffit de résoudre $U' = TU$ avec T triangulaire supérieure.

On peut alors la résoudre facilement par méthode de remontée.

3. Décomposition de Dunford

Thm 51 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si χ_u est scindé sur K, alors il existe un unique couple (d, n) dans $\mathcal{L}(E)^2$ tels que : (Gou) 194

i) d diagonalisable

ii) n nilpotent

iii) $u = d + n$

iv) d et n commutent

De plus, d et n sont des polynômes en u.

DVPT 2

Appli 52 : diagonalisation d'un endomorphisme par blocs trigonalisables

Appli 53 : Décomposition de Dunford généralisée, $u = s + n$ avec s semi-simple. (OA) 160

Références :

- Objectif Agrégation (OA)
- Gourdon Algèbre (Gou)
- Methodix (MX)
- Cognet (COG)

Questions

① Que veut dire "réduction" ?

② démo lemme des noyaux ssp.

③ $\chi_u(u) = 0$

Soit $x \neq 0 \in E$

p : + petit entier tq $(x, u(x), \dots, u^p(x))$ soit liée

$F = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre

et $u^p(x) = a_0 x + \dots + a_{p-1} u^{p-1}(x)$

on complète F en une base B de E

$$\text{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{p-1} X^{p-1}$

$A = C_p$

$\chi_u = \underbrace{\chi_A}_{(-1)^p P(X)} \times \chi_C$, $\chi_u(u)(x) = 0$

④ $M = \begin{pmatrix} a & x & z \\ 0 & a & y \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a, b, x, y, z \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$a \neq b$

$\chi_A(X) = (X-a)^2(X-b)$

$$\frac{1}{\chi_A(X)} = \frac{1}{(X-a)^2(X-b)} = \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \frac{\alpha_3}{X-b}$$

$\alpha_3 = \left.\frac{(X-b)}{\chi_A(X)}\right|_{X=b} = \frac{1}{(b-a)^2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{a-b}$

$\frac{X}{\chi_A(X)} \longrightarrow 0 = \alpha_1 + \alpha_3$ donc $\alpha_1 = \frac{-1}{(b-a)^2}$

$Q_1 = (X-b)$, $Q_2 = (X-a)^2$.

$U_1 = \alpha_2 + \alpha_1(X-a)$

$U_2 = \alpha_3$

~~$1 = U_1 Q_1 + U_2 Q_2$, $P_1 = \alpha_2 id + \alpha_1(u$~~

DECOMPOSITION DE DUNFORD

Référence : GOURDON, Algèbre, p 195-196

Thm : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique χ_u scindé.
Alors il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)$ avec d diagonalisable et n nilpotent tel que $u = d+n$ et $d \circ n = n \circ d$. De plus, $d, n \in \mathbb{K}[u]$

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$. Si $P = \beta \prod_{i=1}^{r} \Pi_i^{\alpha_i}$ (décomposition en facteurs irréductibles) et si on note $N_i = \ker \Pi_i^{\alpha_i}(u)$ $\forall i \in [\![1, r]\!]$, alors la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$ est un polynôme en u, et $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$

Dem : Par lemme des noyaux, on a immédiatement $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$
On pose $Q_i = \prod_{j \neq i} \Pi_j^{\alpha_j}$. Alors les Q_i sont premiers entre eux dans leur ensemble et par le théorème de Bezout, $\exists (U_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}[X]^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} U_i Q_i = 1$. En posant $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(u)$, cette égalité devient $\sum_{j=1}^{n} p_j = id \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} p_j \circ p_i = p_i$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$
Or $\forall i \neq j$, $p_j \circ p_i = U_i U_j(u) \circ Q_i Q_j(u) = 0$ car $P \mid Q_i Q_j$
Donc $p_i^2 = p_i \Rightarrow p_i$ est un projecteur. Reste à trouver son noyau et son image.

$*$ $\mathrm{Im}\, p_i = N_i$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathrm{Im}\, p_i$, $x = p_i(y)$. Alors $\Pi_i^{\alpha_i}(p_i(y)) = \underbrace{\Pi_i^{\alpha_i} U_i Q_i(u)}_{=0}(y)$
car $P \mid \Pi_i^{\alpha_i} Q_i$. Donc $x \in N_i$

$\boxed{\supset}$ Si $x \in N_i$, $x = \sum_{j=1}^{n} p_j(x)$ et $p_j(x) = 0$ $\forall j \neq i$ car $\Pi_i^{\alpha_i} \mid Q_j$

Donc $x = p_i(x) \Rightarrow x \in \mathrm{Im}\, p_i$

* <u>$\mathrm{Ker}\, p_i = \bigoplus_{j\neq i} N_j$</u>

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathrm{Ker}\, p_i$. Alors $x = \sum_{j=1}^{n} p_j(x) = \sum_{j\neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{j\neq i} \mathrm{Im}\, p_j = \bigoplus_{j\neq i} N_j$

$\boxed{\supset}$ $\forall j \neq i$, $N_j \subset \mathrm{Ker}\, p_i$ car $(X-\lambda_j)^{\alpha_j} \mid Q_i$. Donc $\bigoplus_{j\neq i} N_j \subset \mathrm{Ker}\, p_i$.

<u>Dem du thm :</u>

* <u>Existence</u>

On écrit $\chi_u = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et on applique le lemme à ce polynôme. On garde les notations précédentes et on note $p_i = P_i(u)$ la projection sur N_i // $\bigoplus_{j\neq i} N_j$.

On pose alors $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$ et $n = u - d$

d est alors diagonalisable et $n = \sum_{i=1}^{s} (u - \lambda_i id) p_i$ (car $\sum p_i = 1$)

donc, par récurrence, $\forall q \in \mathbb{N}$ $n^q = \sum_{i=1}^{s} (u-\lambda_i id)^q p_i$.

On prend $q = \max \alpha_i$ et alors $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $(u-\lambda_i)^q p_i = 0 \Rightarrow n^q = 0$

Donc n est nilpotent et on a obtenu la décomposition voulue.

* <u>Unicité</u>

On considère (d', n') une autre décomposition. Alors d et d' commutent et sont diagonalisables. Ils sont donc diagonalisables dans une même base $\Rightarrow d - d'$ est diagonalisable.

Or $d - d' = n' - n$ nilpotent. Donc $d - d' = n' - n = 0$.

$\blacksquare$

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES NORMAUX
(DANS UN ESPACE EUCLIDIEN)

<u>Référence</u> : GOURDON <u>Algèbre</u>, p. 259-260 (et site d'Adrien Laurent)

<u>Thm</u> : Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \tau_1 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \tau_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

<u>Lemme</u> : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal et F sev de E stable par u. Alors F est stable par u^* (adjoint de u) et $F^\perp$ est stable par u et u^*. De plus $u_{|F}$ et $u_{|F^\perp}$ sont des endomorphismes normaux.

<u>Dem</u> : Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à $E = F \oplus F^\perp$. Alors
$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$

u normal $\Rightarrow uu^* = u^*u \Rightarrow M{}^tM = {}^tMM$

$\Rightarrow {}^tAA = A{}^tA + B{}^tB$

En passant à la trace on obtient $\mathrm{Tr}(B{}^tB) = 0 = \|B\|^2$ avec $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $M \mapsto \mathrm{Tr}(M{}^tM)^{\frac{1}{2}}$

Donc $B = 0$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. De plus ${}^tAA = A{}^tA$ et ${}^tCC = C{}^tC$. D'où les conclusions du lemme.

<u>Dem du thm</u> : On fait une récurrence sur $n = \dim E$.

- $n = 1$ trivial.
- $n \geq 2$. On suppose le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$

* Si u admet une valeur propre réelle λ

On note E_λ l'espace propre associé et E_λ est stable par u.
Donc, par le lemme, $E_\lambda^\perp$ stable par u et $u_{|E_\lambda^\perp}$ est normal.
Par hypothèse de récurrence, on peut trouver $\mathcal{B}_2$ base de $E_\lambda^\perp$ dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u_{|E_\lambda^\perp})$ a la forme voulue.
Soit $\mathcal{B}_1$ une base orthonormée de E_λ. Alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ a la forme voulue.

* Si u n'admet pas de valeur propre réelle

Soit $Q = X^2 - aX + b$ un facteur irréductible de χ_u. On note $N = \mathrm{Ker}\,Q(u)$

$\rightarrow N \neq \{0\}$ car, dans $\mathbb{C}$, $Q = (X-\lambda)(X-\bar{\lambda})$ (avec λ vp cplxe de u) et $\det Q(u) = \det(u - \lambda Id)(u - \bar{\lambda} Id) = 0$

$\rightarrow$ Soit $x \in N$, $x \neq 0$. On pose $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$
$\dim F = 2$ car u n'admet pas de valeur propre réelle. De plus F stable par u car $u^2(x) = au(x) - bx \in F$ $\forall x \in E$
Donc, par le lemme, $u_{|F^\perp}$ est un endomorphisme normal sur un espace de dimension $n-2$, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence comme au cas 1. On obtient ainsi une base $\mathcal{B}_2$ de $F^\perp$ vérifiant le théorème.
Soit maintenant $\mathcal{B}_1$ une base de F. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_{|F}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
Comme $u_{|F}$ est normal, on a le système $\begin{cases} a^2 + b^2 = a^2 + c^2 & (i) \\ ab + cd = ac + bd & (ii) \end{cases}$
(i) $\Rightarrow b = \pm c$. Si $b = c$, $\chi_{u_{|F}} = X^2 - (a+d)X + ad - b^2$
Donc $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + b^2 \geq 0 \Rightarrow u_{|F}$ a une valeur propre réelle $\Rightarrow u$ aussi. Absurde !
Donc $b = -c$ (et $b \neq 0$ sinon u aurait une valeur propre réelle)
(ii) $\Rightarrow b(a-d) = 0 \Rightarrow a = d \Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_{|F}) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ convient alors pour le théorème

■