Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-ev. Exemples

[U] + [L] : p. 682 sq. et chap. et [W] p. 1 sq.

107

Dans ce qui suit, G désigne un groupe fini, $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

I Représentations.

a. Définitions élémentaires.

Def 1 : Soit $\mathbb{K}[G]$ l'ensemble des fonctions de G dans $\mathbb{K}$ muni de la loi suivante pour $\varphi, \psi \in \mathbb{K}[G]$:

$$\varphi * \psi = \Big(\sum_h \varphi(h)\delta_h\Big)\Big(\sum_k \psi(k)\delta_k\Big) = \sum_{g\in G}\Big(\sum_{hk=g} \varphi(h)\psi(k)\Big)\delta_g \quad \text{où : } \delta_g : G \to \mathbb{K},\ h \mapsto \delta_{g,h}.$$

$(\mathbb{K}[G], +, *)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Ex 2 : $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \simeq \mathbb{C}[X]/(X^n-1)$; $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}] \simeq \dfrac{\mathbb{C}[X;Y]}{(X^2-1;Y^3-1)}$

Def 3 : Une représentation de G sur V est la donnée d'une structure de $\mathbb{K}[G]$-module sur V.

Ex 4 : On peut munir V de la loi : $(\psi, v) \in \mathbb{K}[G]\times V$: $\psi.v = \psi(e)v$ c'est la représentation triviale.

Rmq 5 : Il est aussi équivalent de se donner un morphisme de groupe $\varphi : G \to GL(V)$.

Rmq 6 : Il est aussi équivalent de se donner une action de G sur V telle que : $\forall g \in G$; $\forall (v,u) \in V\times V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $g\cdot(v+\lambda u) = g\cdot v + \lambda g\cdot u$; $g\cdot 0 = 0$.

Ex 7 : $(\mathbb{K}[G], +, *)$ est un $\mathbb{K}[G]$-module. C'est la représentation régulière.

Def 8 : Soit V une représentation de G. La dimension de V en tant que $\mathbb{K}$-ev est nommée degré de la représentation.

Ex 9 : Le degré de la représentation est $|G|$.

Def 10 Soit V une représentation de G. La représentation est dite fidèle si l'action de G sur V est fidèle.

Def 11 : Soit V une représentation de G. Une sous-représentation de G sur V est un sous $\mathbb{K}[G]$-module de V.

Ex 12 : Définissons l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}^n$ ainsi : $\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma\cdot x = \sigma\cdot(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$

Alors $(1, \dots, 1)\cdot\mathbb{C}$ est une sous-représentation.

Def 13 : Soient V et V' deux représentations de G. Un morphisme de V dans V' est un morphisme de $\mathbb{K}[G]$-modules.

b. Les opérations fondamentales de l'algèbre linéaire. [L] p. 683 sq.

Prop 14 : Soient V, V' deux représentations de G. Alors $V\oplus V'$ est une représentation de G muni de la structure : $\forall \psi \in \mathbb{K}[G]$; $\forall (v,v') \in V\times V'$: $\psi\cdot(v\oplus v') = \psi v \oplus \psi v'$.

Prop 15 : Soit V une représentation de G. Alors V^* (dual de V) est une représentation de G muni de la structure : $\forall g \in G$, $\forall f \in V^*$: $g\cdot f : V \to \mathbb{K},\ v \mapsto f(g^{-1}\cdot v)$.

Prop 16 : Soient V, V' deux représentations de G. Alors $V\otimes V'$ est une représentation de G muni de la structure : $\forall \psi \in \mathbb{K}[G], \forall (v,v') \in V\times V'$: $\psi\cdot(v\otimes v') = (\psi\cdot v \otimes \psi\cdot v')$.

Prop 17 : Soient V, V' deux représentations de G, alors : $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V; V')$ est une représentation de G muni de : $g\cdot f : \begin{pmatrix} V \to V' \\ x \mapsto g\cdot f(g^{-1}\cdot x)\end{pmatrix}$

Dans ce qui suit : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et V est une représentation de G.
On note : $\rho : G \to GL(V)$ l'action associée.

c. Structure du $\mathbb{C}[G]$-module V. [U]

Def 18 : V est dite simple si les seules sous-représentations de V sont V et $\{0\}$.

Thm 19 (Lemme de Schur) Soient V, V' deux représentations simples de G. Soit $\varphi : V \to V'$ un morphisme de représentations. Alors : ou φ est nul ou φ est une homothétie.

Thm 20 (Maschke) Soit V' une sous-représentation de V. Alors il existe V'' sous-représentation de V telle que : $V = V'\oplus V''$.

Cor 21 Toute représentation est somme directe de représentations simples.

Ex 22 : Soit G un groupe abélien : Alors $V \simeq \bigoplus \mathbb{C}.v_i$ où les v_i sont les vecteurs propres des endomorphismes de $\rho(G)$.

Ex 23 : Sur $\mathbb{C}^3$, soit la représentation de $\mathfrak{S}_3$ définie comme en ex. 12. $\mathbb{C}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est simple et $H = \{(x;y;z) \in \mathbb{C}^3 \mid x+y+z=0\}$ est une sous-représentation simple. D'où : $\mathbb{C}^3 \simeq H\oplus\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

II Caractères. [L] p. 685 sq.

a. Premières définitions.

Def 24 : Le caractère associé à la représentation $\rho : G \to GL(V)$ est :

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C},\quad g \mapsto Tr(\rho(g)).$$

Ex 25 : Soit $\rho : \mathfrak{S}_n \to GL_n(\mathbb{C})$ définie en ex. 12. Alors : $\chi_\rho(\sigma) = $ nbre de points fixes de σ.

Prop 26 : Soient $\rho : G \to GL(V)$ et $\rho' : G \to GL(V')$ deux représentations de G.
(i) Si $V \simeq V'$ en tant que représentation, alors $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.
(ii) $\chi_\rho + \chi_{\rho'}$ est le caractère associé à $V \oplus V'$
(iii) $\overline{\chi_\rho}$ est le caractère associé à V^*.
(iv) $\chi_\rho \chi_{\rho'}$ est le caractère associé à $V \otimes V'$.
(v) $\overline{\chi_\rho}\chi_{\rho'}$ est le caractère associé à $L_G(V, V')$.

Def 27 : Un caractère est dit simple si la représentation ρ l'est.
Ex 28 : Le caractère d'une représentation de degré 1 est simple.
Le caractère donné en ex. 25 n'est pas irréductible/simple.

[L] p. 690 sq. **b. Fonctions centrales.**

Def 29 : Soit $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction. f est dite centrale si :
$$\forall (g,h) \in G \times G : f(h) = f(ghg^{-1}).$$
Rem 30 : Les caractères sont centraux.
Lm 31 : La dimension de l'espace des fonctions centrales est égal au nombre de classes de conjugaison dans G.
Def/Prop 32 : Soient f, h deux fonctions centrales : $(f,h) \mapsto \langle f, h\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\overline{h(g)}$ définit un produit scalaire hermitien sur l'espace des fonctions centrales.
Thm 33 : Les caractères simples forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales.

Cor 34 : Soient $\chi_\rho, \chi_{\rho'}$ deux caractères simples, alors :
ou $\langle \chi_\rho ; \chi_{\rho'} \rangle = 1$ et $V \simeq V'$
ou $\langle \chi_\rho ; \chi_{\rho'} \rangle = 0$

c. Précisions sur la structure de $\mathbb{C}[G]$-module.
Thm 35 : Soit V une représentation de G, telle que : $V = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i$ où les W_i sont des représentations irréductibles. Soit χ le caractère associé à V, soit χ_ρ le caractère simple associé à V_ρ.

(1) Le nombre des W_i isomorphes à V_ρ est $\langle \chi ; \chi_\rho \rangle$. Il est indépendant de la représentation choisie. On le nomme multiplicité de V_ρ dans V.
(2) La sous-représentation : $W_\rho = \bigoplus_{\substack{W_i \simeq V_\rho \\ i \in \{1,\dots,s\}}} W_i \simeq \langle \chi ; \chi_\rho \rangle V_\rho$ est nommée composante isotypique

(3) On associe à V la décomposition dite canonique : $V = \bigoplus_{\chi \text{ irréd}} W_\chi$.

Cor 36 : Deux représentations V, V' sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère.

d. Retour sur la représentation régulière. [H2G2] p. 46 sq.
Lm 37 : Soit χ_{reg} le caractère de la représentation régulière :
$$\forall g \in G : \chi_{reg}(g) = \begin{cases} |G| \text{ si } g = e \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$
Prop 38 : Soit V_{reg} la représentation régulière. Alors :
$$V_{reg} \simeq \bigoplus_{\chi \text{ simple}} (V_\chi)^{\chi(e)}$$
Cor 39 (Burnside) On a la formule suivante : $\sum_{\chi \text{ simple}} \chi(e)^2 = |G|$.

e. Table des caractères. [H2G2] p. 46 sq.
Def 40 Soient $(C_i)_{i\in\{1,\dots,d\}}$ les classes de conjugaison dans G. Soient $(\chi_i)_{i\in\{1,\dots,d\}}$ les caractères simples. On appelle table des caractères de G la matrice de terme $(\chi_j(C_i))_{(i,j)}$.
Rmq 41 : La matrice ainsi définie est carré.
Prop 42 : Soit U la table des caractères de G, soit $D = \mathrm{Diag}(|C_i|)$.
alors : (i) $U D\, {}^t\overline{U} = |G| I_s$.
(ii) ${}^t\overline{U}.U = |G| D^{-1}$
(iii) $\sum \overline{\chi_i}(g)\chi_i(g') = \begin{cases} \frac{|G|}{|C_j|} \text{ si } g, g' \text{ sont dans } C_j. \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
Ex 43 : Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ (c.f. Annexe A) DVPMT.
Rmq 44 : La table des caractères ne caractérise pas le groupe : $\mathbb{H}_8$ (quaternions de norme 1) et D_4 ont même table de caractères et ne sont pas isomorphes.

f. Retour à la théorie des groupes. [Pey].
Def 45 : Soit χ un caractère. On nomme noyau du caractère χ l'ensemble :
$$\ker \chi = \{ g \in G \mid \chi(g) = \chi(e) \}.$$

Thm 46 : Soient $\chi_1, \dots, \chi_s$ les caractères irréductibles de G deux à deux non isomorphes. Soit H un sous-groupe de G. H est distingué si et seulement si il existe $I \subset \{1, \dots, s\}$ telle que :

$$H = \bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} \chi_i .$$

Ex/Ap. 47 : Treillis des sous groupes de $\mathfrak{S}_4$.

262] 477sq.

III Vers un sous-corps de $\mathbb{C}$: $\mathbb{R}$.

[H]

Déf 48 Soit $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$. On dit que ρ se réalise sur $\mathbb{R}$ s'il existe une représentation $\rho' : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ telle que, avec $i : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{C})$ l'inclusion, on ait : $i \circ \rho'$ est isomorphe à ρ. (En tant que représentation)

Ex 49 : La représentation de $\mathfrak{S}_3$ ainsi donnée : $\rho((1;2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho((1;3)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho((2;3)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est réalisable sur $\mathbb{R}$.
(cf. Annexe D)

Prop 50 : Soit $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ une représentation irréductible.
On suppose que χ_ρ est à valeurs réelles.
Les Assertions suivantes sont équivalentes :
(i) ρ peut se réaliser sur $\mathbb{R}$.
(ii) Il existe une forme bilinéaire symétrique non nulle sur $\mathbb{C}^n$ invariante par G.
(iii) On a : $\dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} \chi(g^2) = 1$.

Thm 51 : Soit χ le caractère d'une représentation complexe irréductible de G, on a :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2) = \begin{cases} 0 \text{ si } \chi \text{ n'est pas à valeurs réelles.} \\ 1 \text{ si } \chi \text{ est à valeurs réelles et réalisable sur } \mathbb{R}. \\ -1 \text{ si } \chi \text{ est à valeurs réelles mais n'est pas réalisable sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ex. 52 : $\rho : D_4 \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}^2)$ est réalisable sur $\mathbb{R}$.
$\rho(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\rho(r) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$\rho' : \mathbb{H}_8 \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}^2)$ n'est pas réalisable sur $\mathbb{R}$.
avec $\rho'(I) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$; $\rho'(J) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\rho'(K) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.
(où $\mathbb{H}_8 = \{\pm 1 ; \pm I ; \pm J ; \pm K\}$ avec $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$).
cf. Annexe E.

Annexes.

A. Table de $\mathfrak{S}_4$

$\mathfrak{S}_4$	id	Transposit°	3-cycles	double transposit°	4-cycles
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	1	-1
χ_p	3	1	0	-1	-1
χ_c	3	-1	0	-1	1
χ_s	2	0	1	2	0.

C. Treillis des sous-groupes de $\mathfrak{S}_4$.

$\mathfrak{S}_4 = \mathrm{Ker}\,\chi_1$.

|

$\mathrm{Ker}\,\chi_\varepsilon \simeq \mathfrak{A}_4$

|

$\mathrm{Ker}\,\chi_s = \mathrm{Ker}\,\chi_s \cap \mathrm{Ker}\,\chi_\varepsilon \simeq V_4$

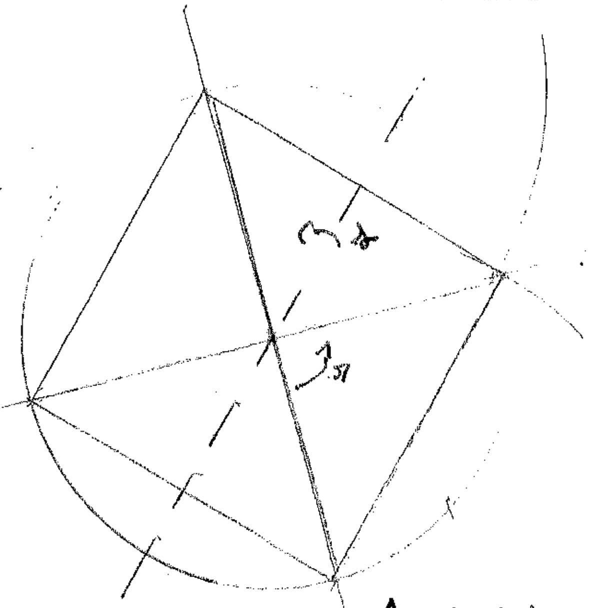
|

$\mathrm{Ker}\,\chi_p = \{e\}$.

B. Table de $\mathbb{H}_8$:

$\mathbb{H}$	1	-1	$\pm i$	$\pm j$	$\pm k$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

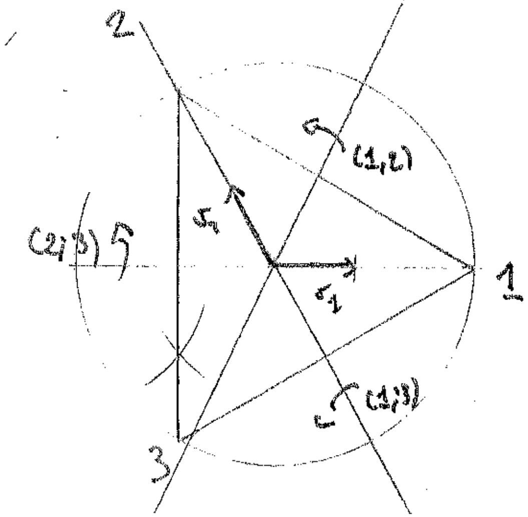
E. Réalisation réelle de $\rho : \mathbb{D}_4 \to GL_2(\mathbb{R})$



$\mathbb{D}_4 = \langle r, s \mid r^4 = 1, s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$

$\rho(r) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; $\rho(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

D. Réalisation réelle de ρ : visualisation de $\mathrm{Isom}(T) \simeq \mathfrak{S}_3$.



Bibliographie:

[W] : Webb, Peter, A course in finite Group representation theory.

[L] : Lang, Serge, Algèbre Dunod, 2014 (3ème édition)

[U] Ulmer, Felix, Théorie des groupes.

[H2G2] : Histoires hédonistes de groupes et géométrie, Tome 2 Caldero & Germoni

[F-H] : Fulton-Harris, Springer Verlag

107. REPRÉSENTATIONS ET CARACTÈRES D'UN GROUPE FINI SUR UN C-ESPACE VECTORIEL.

ALEXANDRE EIMER ET MERCEDES HAIECH

Table des matières

Introduction

1. Développements

1.1. Tables des caractères, sous-groupes distingués et simplicité.

Ref : Peyré, l'algèbre discrète de la transformée de Fourier p230

Soit G un groupe fini et χ un caractère irréductible de G. On note $K_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$.

Théorème 1.1.1. *Notons $(\chi_1, \cdots, \chi_r)$ les caractères irréductibles deux à deux non isomorphes de G. Soit H un sous-groupe de G. Alors H est distingué si et seulement s'il existe $I \subset \{1, \cdots, r\}$ tel que $H = \cap_{i \in I} K_{\chi_i}$.*

Lemme 1.1.2. *Soit G un groupe fini et χ un caractère d'une représentation V de G. Alors $K_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$ est un sous-groupe distingué de G.*

Preuve du lemme. Soit (V, ρ) une représentation de G dont χ est le caractère. Nous allons montrer que $K_\chi = \mathrm{Ker}(\rho)$ qui est bien un sous-groupe distingué de G. On rappelle que $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est un morphisme de groupe. Si $g \in \mathrm{Ker}(\rho)$, alors $\rho(g) = \mathrm{Id}_V = \rho(1)$, et finalement $\chi(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)) = \mathrm{Tr}(\rho(1)) = \chi(1)$. On a bien $\mathrm{Ker}(\rho) \subset K_\chi$.

Réciproquement, soit $g \in K_\chi$. On a $g^{|G|} = e_G$ par le théorème de Lagrange et donc $\rho(g)^{|G|} = \rho(g^{|G|}) = \mathrm{Id}_V$. Finalement l'endomorphisme $\rho(g)$ est annulé par le polynôme $X^{|G|} - 1$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbf{C}$. Donc $\rho(g)$ est diagonalisable. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité. Comme $g \in K_\chi$, alors $\chi(g) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_V) = n$. Or les λ_i sont des racines $|G|$ième de l'unité, ainsi

$$|\chi(g)| = n = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = n.$$

Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si tous les λ_i sont positivement liés. Comme ils sont tous de module 1 et que leur somme vaut n alors, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on a $\lambda_i = 1$. Ainsi $\rho(g) = \mathrm{Id}_V$, et donc $g \in Ker(\rho)$. □

Preuve du théorème. Une intersection de sous-groupe distingués étant distinguée, le lemme précédent nous assure qu'une intersection du type $\cap_{i\in I} K_{\chi_i}$ est un sous-groupe distingué de G.

Réciproquement, soit H un sous-groupe distingué de G. Notons (V, ρ) la représentation régulière de G/H, et $\pi \colon G \to G/H$ la projection canonique. Alors $\rho := \tilde{\rho} \circ \pi$ définit une représentation de G sur V. Comme la représentation régulière est fidèle, alors $Ker(\rho) = \{0\}$ et ainsi $Ker(\rho) = H$. Autrement dit $H = K_\chi$, où χ est le caractère associé à la représentation ρ. Décomposons ρ à l'aide des représentations irréductibles de G. Il existe alors des entiers $a_1, \cdots, a_r$ tels que $\chi = \sum_{i=1}^{r} a_i \chi_i$. On a alors pour tout $g \in G$

$$|\chi(g)| \leqslant \sum_{i=1}^{r} a_i |\chi_i(g)| \leqslant \sum_{i=1}^{r} a_i \chi_i(1) = \chi(1).$$

Pour la seconde inégalité on utilise que $|\chi_i(g)| \leqslant \chi_i(1)$ (voir preuve du lemme). Alors $g \in K_\chi$ si et seulement si ces inégalités sont des égalités, si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, on a $a_i \chi_i(g) = a_i \chi_i(1)$. Ce qui revient à demander que $g \in K_{chi_i}$ à chaque fois que $m_i \neq 0$. On pose $I = \{i \in \{1, \cdots, r\} \mid m_i \neq 0\}$. Alors $H \in \cap_{i\in I} K_{\chi_i}$. □

Corollaire 1.1.3. *Un groupe fini G est simple si et seulement si pour tout caractère irréductible non trivial χ de G et, pour tout $g \in G \backslash \{e_G\}$, on a $\chi(g) \neq \chi(1)$.*

Démonstration. S'il existe un caractère irréductible non trivial χ de G et, pour tout $g \in G \backslash \{e_G\}$, on a $\chi(g) \neq \chi(1)$, alors par le lemme K_χ est un sous-groupe distingué non trivial de G.

Réciproquement si G n'est pas simple, il existe un sous-groupe distingué H non trivial, et d'après le théorème précédent $H = \cap_{i\in I} K_{\chi_i}$. Soit $g \in H$ non trivial alors, pour $i \in I$, on a $g \in K_{\chi_i}$. Cela signifie que $\chi_i(g) = \chi_i(1)$. □

1.2. **Table de caractère du groupe $\mathfrak{S}_4$.** *Ref : Peyré, l'algèbre discrète de la transformée de Fourier p228*

La première chose à faire est de déterminer les classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_4$, le groupe des permutations à 4 éléments. On utilise pour cela le lemme suivant.

Lemme 1.2.1 (Classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$). *Deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ sont dans la même classe de conjugaison si et seulement leur décomposition en* *cycle disjoint possède le même nombre de cycles d'une longueur donnée. En particulier, il y autant de classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ que de partitions de n du type $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_p$ avec $k_1 \geqslant k_1 \geqslant \cdots \geqslant k_p > 0$.*

Démonstration. Tout d'abord notons que deux cycles de même longueur sont conjuguées. En effet soit $c = (c_1, \cdots, c_k)$ et $c = (c'_1, \cdots, c'_k)$, alors ils sont conjugués par la permutation $\sigma : c_i \mapsto c'_i$ et $c = \sigma^{-1} \circ c' \circ \sigma$. Réciproquement il est clair que la conjugaison d'une permutation conjugue aussi les cycles qui la compose et donc conserve leurs longueurs. □

Les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$ sont donc :

— La classe de l'identité correspondant à la partition 4=1+1+1+1. Il y a un seul élément dans cette classe.

— La classe des transpositions qui correspond à la partition 4=2+1+1. Il y a 6 éléments dans cette classe (choix de deux éléments parmi 4 qui restent fixe).

— La classe des 3-cycles correspondant à la partition 4=3+1. Elle comporte 8 éléments (4 choix de 3 éléments parmi 4 et deux cycles possibles par choix).

— La classe des 4-cycles correspondant à la partition 4=4. Elle comporte 6 éléments.

— La classe des doubles transpositions à support disjoint correspondant à la partition 4=2+2. Elle comporte 3 éléments (6 choix possible de transposition, et le choix de la deuxième divise par deux le nombre de possibilités).

On en déduit le nombre de représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$ grâce au résultat suivant :

Proposition 1.2.2. *Le nombre de représentations irréductibles sur G non isomorphes est égal au nombre de classe de conjugaison de G.*

Nous en déduisons donc que $\mathfrak{S}_4$ admet à isomorphisme près 5 représentations irréductibles.

On connait deux représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$.

— La représentation triviale de caractère $\chi_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$ (on indexe les colonnes dans le même ordre que celui utilisé pour décrire les classes de conjugaisons).

— La représentation alternée qui correspond à la signature et a pour caractère $\chi_\varepsilon = (1, -1, 1, -1, 1)$.

Considérons maintenant la représentation par permutation de $\mathfrak{S}_4$ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \rho_p : & \mathfrak{S}_4 & \to & \mathrm{Gl}_4(\mathbf{C}) \\ & \sigma & \mapsto & (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4}. \end{array}$$

Cette représentation n'est pas irréductible, en effet la droite $\mathcal{D} = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle$ est $\mathfrak{S}_4$-stable et admet un supplémentaire stable, l'hyperplan $\mathcal{H} = \{x \in \mathbf{C}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. La représentation ρ_p induit sur $\mathcal{D}$ la représentation triviale et sur un $\mathcal{H}$ une certaine représentation que nous noterons ρ_s.

En notant $\chi_\bullet$ le caractère associé à la représentation $\rho_\bullet$, on a $\chi_p = \chi_1 + \chi_s$. Par ailleurs on sait que la valeur de $\chi_p(\sigma)$ correspond au nombre d'éléments laissés fixes par σ ce qui donne $\chi_p = (4, 2, 1, 0, 0)$, d'où $\chi_s = (3, 1, 0, -1, -1)$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} |\mathfrak{S}_4| \langle \chi_s, \chi_s \rangle &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \chi_s(\sigma)\chi_s\bar{(}\sigma) \\ &= 1\chi_s(\mathrm{Id})^2 + 6\chi_s((12))^2 + 8\chi_s((123))^2 \\ &\quad +6\chi_s((1234))^2 + 3\chi_s((12)(34))^2 \\ &= 24. \end{aligned}$$

Ainsi $\langle \chi_s, \chi_s \rangle = 1$ et le caractère χ_s est irréductible.

On peut résumer notre table de caractère ainsi :

	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1

Il reste encore deux représentations à déterminer. Notons n_4 et n_5 les dimensions des représentations restant à déterminer. La relation $|\mathfrak{S}_4| = \sum_{i=1}^5 n_i^2$ nous permet de déduire que $n_4^2 + n_5^2 = 13$. On en déduit que nécessairement $n_4 = 2$ et $n_5 = 3$.

La première représentation peut s'obtenir par l'intermédiaire de la représentation des morphismes sur $W = \mathcal{L}(V_s, V_\varepsilon)$ des représentations standard et alternée. Elle est de degré 3 et son caractère est $\chi_{\mathcal{L}(V_s,V_\varepsilon)} = \chi_s \bar{\chi_\varepsilon} = (3, -1, 0, 1, -1)$. Un calcul montre que $\left\langle \chi_{\mathcal{L}(V_s,V_\varepsilon)}, \chi_{\mathcal{L}(V_s,V_\varepsilon)} \right\rangle = 1$. C'est donc une représentation irréductible.

Le dernier caractère peut être déduit de la relation d'orthogonalité des colonnes, à savoir que pour tout $\sigma \neq \mathrm{Id}$, on a $\sum_{i=1}^5 n_i \chi_i(s) = 0$. Finalement, l'on en déduit que $\chi_5 = (2, 0, -1, 0, 2)$.

On a donc la table des caractères complète de $\mathfrak{S}_4$.

	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-1	0	2
χ_s	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	-1	0	1	-1