102

Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

I Nombres complexes de module 1

1. Le groupe $\mathbb{U}$

Déf 1 : Le groupe des nombres complexes de module 1 est le noyau du morphisme $(\mathbb{C}^*,\times) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*,\times)$, $z \longmapsto |z|$, il est noté $\mathbb{U}$.

Rq 2 : En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{U} \simeq \mathbb{S}^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

Prop 3 : L'application $\begin{array}{l}\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (r,u) \longmapsto ru\end{array}$ est un isomorphisme.

Déf 4 : On définit $\exp : \left|\begin{array}{l}\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}\\ z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\end{array}\right.$, $\mathcal{E} : \left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}\\ x\longmapsto e^{ix}\end{array}\right.$.

Prop 5 : L'application $\mathcal{E}$ est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{U},\times)$ et a pour noyau $2\pi\mathbb{Z}$ et donc $\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$.

Prop 6 : $\mathbb{U}$ est compact connexe.

2. Applications trigonométriques

Déf 7 : $\forall x\in\mathbb{R}$ $\cos(x) = \mathrm{Re}(\mathcal{E}(x))$, $\sin(x) = \mathrm{Im}(\mathcal{E}(x))$

Prop 8 : (Formule de Moivre)
$\forall n\in\mathbb{Z}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $(\cos(x)+i\sin(x))^n = \cos(nx)+i\sin(nx)$.

Prop 9 : (Formules d'Euler)
$\forall x\in\mathbb{R}$ $\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\sin(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

App 10 : $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus2\pi\mathbb{Z}$, $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

App 11 : (linéarisation) $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\cos^n x = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)x}$

App 12 : (Polynômes de Tchebychev)
$\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists!\, T_n\in\mathbb{R}[X]$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\cos(nx) = T_n(\cos x)$

App 13 : • Noyau de Dirichlet : $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ où $e_n : t\longmapsto e^{int}$.
On a alors $D_N(t) = \dfrac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$ pour $t\notin 2\pi\mathbb{Z}$.

• Noyau de Féjer : $K_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}D_n(t) = \frac{1}{N}\left(\dfrac{\sin(\frac{Nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2$

3. Paramétrisation de $\mathbb{U}$

Prop 14 : L'application $f : \begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{U}\setminus\{(-1,0)\}\\ t\longmapsto\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\end{array}$ est une bijection.

Elle se prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $f(\infty) = (-1,0)$.

App 15 : Les points de $\mathbb{U}$ à coordonnées rationnelles sont les $f(q)$, $q\in\mathbb{Q}$ et $(-1,0)$.

App 16 : L'équation $x^2+y^2=z^2$ où $x,y,z\in\mathbb{Z}$ avec y pair admet comme solutions primitive ($\mathrm{pgcd}(x,y,z)=1$) les triplets pythagoriciens $(r^2-s^2, 2rs, r^2+s^2)$ avec $\begin{cases} r,s\in\mathbb{Z}\\ \mathrm{pgcd}(r,s)=1\end{cases}$

4. Mesure d'un angle orienté

Déf 17 : Soit $\hat{A}$ l'ensemble des couples de vecteurs de $\mathbb{S}^2$.
On définit la relation $\mathcal{R}$ d'équivalence sur $\hat{A}$:
$(u,v)\,\mathcal{R}\,(u',v') \iff \exists r\in SO_2(\mathbb{R})$ tq $r(u)=v$ et $r(u')=v'$.

Déf 18 : La classe d'équivalence de (u,v) est appelée angle orienté de (u,v). On note $A = \hat{A}/_{\mathcal{R}}$ l'ensemble des angles orientés.

Prop 19 : $\begin{cases} A \longrightarrow SO_2(\mathbb{R}) \\ \alpha\longmapsto r_\alpha\end{cases}$ où r_α est l'unique rotation tq $r(u)=v$ est une bijection.

Prop 20 : $\begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{U}\longrightarrow SO_2(\mathbb{R})\\ \theta\longmapsto e^{i\theta}\longmapsto\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\end{array}$ est surjective de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Rq 21 : $SO_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$.

Déf 22 : La mesure d'un angle orienté est un réel θ tel que $e^{i\theta}$ soit l'élément de $\mathbb{U}$ associé à $\bar{a}$.

Rq 23 : La mesure d'un angle dépend de l'orientation du plan.

II Racines de l'unité et cyclotomie

1. Racines de l'unité et sous-groupes de $\mathbb{U}$

Prop 24 : Tout sous-groupe compact de $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.

Prop 25 : Un sous-groupe de $\mathbb{U}$ est dense ou fini.

Ex 26 : Le sous-groupe $\langle e^{2i\pi t} \rangle$ de $\mathbb{U}$ est dense si $t \notin \mathbb{Q}$ et fini sinon.

App 27 : L'adhérence de $(\sin(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est $[-1,1]$.

Déf 28 : Le sous-groupe $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est le noyau du morphisme $\left| \begin{array}{l} \mathbb{U} \to \mathbb{U} \\ z \mapsto z^n \end{array} \right.$.

Prop 29 : $\mathbb{U}_n$ est cyclique, de cardinal n et admet pour générateur $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Déf 30 On appelle racine primitive n-ième de l'unité tout générateur de $\mathbb{U}_n$, leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n^\times$ et on a $\mathbb{U}_n^\times = \{\omega^k, k \wedge n = 1\}$, donc $|\mathbb{U}_n^\times| = \Phi(n)$ où Φ est l'indicatrice d'Euler.

Ex 31 : $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$ $\mathbb{U}_2^\times = \{-1\}$, $\mathbb{U}_4 = \{-1, 1, -i, i\}$ $\mathbb{U}_4^\times = \{i, -i\}$.

Thm 32 : Le seul sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$ de cardinal n est $\mathbb{U}_n$.

Prop 33 : $\mathbb{U}_d \subset \mathbb{U}_n$ ssi $d | n$.

Prop 34 : $\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d|n} \mathbb{U}_d^\times$.

App 35 : $n = \sum_{d|n} \Phi(d)$.

Thm 36 : (Kronecker) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire dont les racines sont de module inférieur à 1. Si $P(0) \neq 0$, alors toutes les racines de P sont dans $\mathbb{U}$.

2. Polynômes cyclotomiques

Déf 37 : On appelle n-ième polynôme cyclotomique sur $\mathbb{C}$ le polynôme $\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n^\times} (X - \zeta)$

Rq 38 : Φ_n est unitaire de degré $\Phi(n)$.

Ex 39 : $\Phi_1(X) = (X-1)$ $\Phi_2(X) = (X+1)$

Prop 40 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$.

Rq 41 : Cette formule permet de calculer Φ_n par récurrence

Ex 42 : $\Phi_3(X) = \frac{X^3-1}{\Phi_1(X)\Phi_2(X)} = 1 + X + X^2$. $\Phi_p(X) = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$, $\Phi_{p^\alpha}(X) = \Phi_p(X^{p^{\alpha-1}})$, $p \in \mathcal{P}$.

Rq 43 : En considérant les degrés, on retrouve $\sum_{d|n} \Phi(d) = n$.

Prop 44 : $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

Rq 45 : On peut considérer les racines de l'unité sur un corps quelconque et définir les polynômes cyclotomiques. Il faut alors prêter attention à la caractéristique du corps. Cette théorie permet de démontrer le théorème suivant :

Thm 46 : (Wedderburn) Tout anneau sans diviseur de 0 et fini est un corps (commutatif).

Thm 47 : $\Phi_n(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$, donc sur $\mathbb{Q}$ dvpt 1

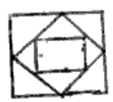
Cor 48 : Si $\zeta \in \mathbb{U}_n^\times$, $\min(\zeta, \mathbb{Q}, X) = \Phi_n(X)$. $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \Phi(n)$. $\mathbb{Q}(\zeta)$ est appelée extension cyclotomique

3. Matrices circulantes

Déf 49 : On appelle matrice circulante une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$ où $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

Prop 50 : Une telle matrice s'écrit $\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, elle a pour spectre $\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^k \, , \, \zeta \in U_n \right\}$.

App 51 : Soit P_0 le polygône de sommets $(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$, on définit P_{k+1} le polygône de sommets $(z_1^{(k+1)}, \dots, z_n^{(k+1)})$ où $z_1^{(k+1)} = \frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, \dots, z_n^{(k+1)} = \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2}$.
Alors, la suite de polygônes converge vers le centre de gravité de P_0.



III Caractère et transformée de Fourier discrète

1. Application des caractères aux groupes abéliens

Déf 52 : Soit G un groupe fini. Un caractère sur G est un morphisme de G sur $\mathbb{C}^\times$. On note $\hat{G}$ l'ensemble des caractère sur G, c'est le dual de G.

Prop 53 : Si G est de cardinal n, χ est à valeurs dans U_n. $\hat{G}$ est donc un groupe abélien fini.

Prop 54 : Si G est cyclique, $\hat{G} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Rq 55 : Si G est abélien fini, $\hat{G} \simeq G$ mais la preuve est plus délicate. Cet isomorphisme n'est pas canonique contrairement à l'isomorphisme $G \simeq \hat{\hat{G}}$.

Thm 56 : Soient G un groupe abélien fini et $H \leq G$, si $\chi \in \hat{H}$ il existe $\tilde{\chi} \in \hat{G}$ tq $\tilde{\chi}_{|H} = \chi$.

App 57 : Soit G un groupe abélien fini. Il existe $r \geq 1$ et des entiers $d_1 | d_2 | \dots | d_r$ tels que $G \simeq U_{d_1} \times \dots \times U_{d_r}$. Les d_i sont uniques et sont appelés facteurs invariants de G.

dvpt 2

2. Transformée de Fourier discrète

Déf 58 : Soient $f = (f_0, \dots, f_{N-1})$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{N}}$, on définit la transformée de Fourier discrète de f comme le vecteur $\hat{f}$ où $\hat{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \omega^{-nk}$.

Prop 59 : $F : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$, $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme d'ev.

Prop 60 : On a la formule d'inversion suivante :

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k \, \omega_N^{nk}.$$

App 61 : On retrouve le résultat sur les matrices circulantes.

Rq 62 : Les caractères sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont : $\forall s \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\chi_k(s) = \omega^{-ks}$.

On a alors $\begin{cases} \hat{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \chi_k(n) \\ f_n = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k \chi_k(-n) \end{cases}$