Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible

Arnaud Girand

17 décembre 2011

Référence :
- [Gou08], p. 252 – 254

Leçons :
- 223 - Convergence des suites numériques. Exemples et applications.
- 230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
- 241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Proposition 1 (Théorème d'Abel angulaire)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et de somme f.
Soit $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On pose :

$$\Delta_{\theta_0} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \varphi \in [-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\varphi}\}$$

On suppose que $\sum a_n$ converge.
Alors :

$$f(z) \xrightarrow[\substack{z \in \Delta_{\theta_0} \\ z \to 1}]{} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Démonstration : On adopte les conventions de notations suivantes :

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n,\ \forall n \geq 0,\ S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k,\ R_n := S - S_n$$

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ on a , comme[1] $a_n = R_{n-1} - R_n$:

$$\begin{aligned}
\forall N \geq 1,\ \sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N &= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n(z^n - 1) \\
&= R_0(z-1) + \sum_{n=1}^{N-1} R_n z^{n+1} - \sum_{n=1}^{N-1} R_n - \sum_{n=1}^{N-1} R_n z^n + \sum_{n=1}^{N-1} R_n - R_N(Z^N - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - z^n) - R_N(z^N - 1) \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N(z^N - 1)
\end{aligned}$$

Comme $\sum a_n$ converge, $R_N \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$. De plus $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N\right)_N$ converge car $|z| < 1$ et donc $\left(\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n\right)_N$ converge ce qui entraîne, par passage à la limite :

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \tag{1}$$

1. Pour ceux qui voudraient briller en société, ce type de calcul s'appelle une transformée d'Abel.

Fixons à présent $\varepsilon > 0$. Alors par convergence de $(R_n)_n$ vers 0 il existe $N \geq 1$ tel que $\forall n \geq N$, $|R_n| \leq \varepsilon$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ on a alors, par (1) :

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \varepsilon |z-1| \sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^n \tag{2}$$

$$\leq |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|} \tag{3}$$

Soit à présent $z \in \Delta_{\theta_0}$: alors il existe $\rho > 0$ et $\varphi \in [-\theta_0, \theta_0]$ tels que $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$ et donc $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos(\varphi) + \rho^2$.

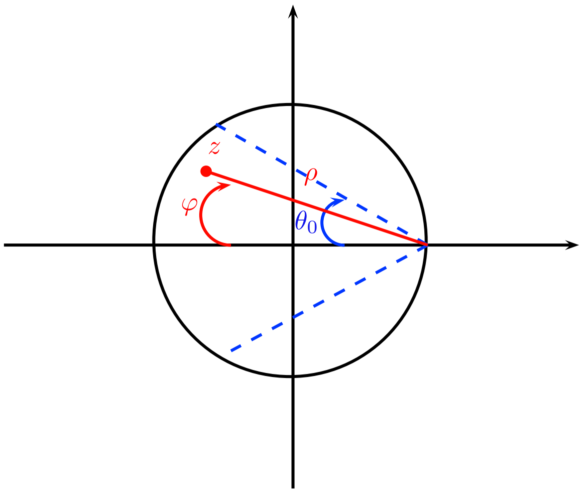

Figure 1 – Coordonnées dans Δ_{θ_0}.

Si on suppose $\rho \leq \cos(\theta_0)$ (ce qui a un sens puisque notre intention est de faire tendre z vers 1 dans Δ_{θ_0} alors :

$$\begin{aligned}
\frac{|z-1|}{1-|z|} &= \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) \\
&= \frac{\rho}{2\rho\cos(\varphi) - \rho}(1+|z|) \\
&\leq \frac{2}{2\cos(\varphi) - \rho} \\
&\leq \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} \quad \text{car } \cos(\varphi) \geq \cos(\theta_0) \\
&= \frac{2}{\cos(\theta_0)}
\end{aligned}$$

Finalement, si on se donne $\alpha_N > 0$ tel que $\alpha_N \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \varepsilon$ et $z \in \Delta_{\theta_0}$ tel que $|z-1|^leq \min(\alpha_N, \cos(\theta_0))$ on a, par (3) :

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

D'où le résultat.

On poursuit ce développement avec une "semi–réciproque" du théorème d'Abel angulaire :

Proposition 2 (Théorème taubérien faible)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f.
On suppose que :
– $\exists S \in \mathbb{C}, \quad f(x) \xrightarrow[\substack{x \in (-1,1) \\ x \to 1}]{} S$;

– $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Alors la série $\sum a_n$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

Démonstration : On adopte la notation suivante :

$$\forall n \geq 0,\ S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in (0,1)$:

$$S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$$

Or :

$$\forall k \geq 1, \quad (1-x^k) = (1-x)\sum_{i=0}^{k-1} x^i \leq (1-x)k \text{ car } x \leq 1$$

De fait [2], la suite $(ka_k)_k$ étant bornée car $a_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$, on a :

$$|S_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{n}|a_k|x^k \tag{4}$$

$$\leq (1-x)Mn + \frac{1}{n}\frac{1}{(1-x)}\sup_{k>n}(k|a_k|) \text{ où } M := \sup_{k\geq 1}(k|a_k|) \tag{5}$$

Soit $0 < \varepsilon < 1$: alors d'après (5) :

$$\forall n \geq 1, \quad \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq M\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\sup_{k>n}(k|a_k|)$$

La suite (ka_k) convergeant vers 0 il existe $N_0 \geq 1$ tel que $\sup_{k>N_0}(k|a_k|)$. Ainsi :

$$\forall n \geq N_0, \quad \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq M\varepsilon + \varepsilon \tag{6}$$

Or $f(x) \xrightarrow[\substack{x\in(-1,1)\\ x\to 1}]{} S$ donc il existe $N_1 \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq N_1, \quad \left|f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S\right| \leq \varepsilon \tag{7}$$

En combinant (6) et (7) on obtient :

$$\begin{aligned}\forall n \geq \max(N_0, N_1), \quad |S_n - S| &\leq \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| + \qquad \left|f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S\right| \\ &\leq \varepsilon(M+2)\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Détails supplémentaires :

– La réciproque du théorème d'Abel angulaire est fausse. En effet, la série $\sum(-1)^n z^n$ converge normalement sur le disque unité ouvert vers $z \mapsto \frac{1}{1+z}$ et :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \xrightarrow[z\to 1,\, |z|<1]{} \frac{1}{2} = \lim_{z\to 1,\, |z|<1} \frac{1}{1+z}$$

Cependant, la série $\sum(-1)^n$ n'est pas convergente.

Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse (2e édition).* Ellipses, 2008.

2. La première majoration dans la seconde somme provenant du fait que si $k \geq n+1$ alors (!) $\frac{k}{n} \geq 1$.