Nombres de Bell

Arnaud Girand

7 janvier 2012

Références :
- [FGN07], p. 14–16

Leçons :
- 145 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
- 241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
- 247 - Exemples de problèmes d'interversion de limites.

Prérequis :
- théorème de Fubini pour les séries doubles.

Proposition 1
Pour $n \geq 0$ on note B_n le nombre[1] de partitions distinctes de l'ensemble $[n]$.
Alors :

(i) la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et sa somme f vérifie :

$$\forall z \in (-R, R), \quad f(z) = e^{e^z - 1}$$

(ii) pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$$

Démonstration :

(*i*) Soit $n \geq 0$. Pour $0 \leq k \leq n$, on note E_k l'ensemble des partitions de $[n+1]$ telle que le "morceau[2]" contenant $n+1$ soit de cardinal $k+1$. Pour construire une telle partition, il suffit de choisir la classe de $n+1$ (choix de k éléments dans $[n]$) puis de partitionner les $n + 1 - (k+1) = n - k$ entiers restants, d'où $\operatorname{card}(E_k) = C_n^k B_{n-k}$.
De plus, il est clair que $\{E_0, \dots, E_n\}$ est une partition de l'ensemble des partitions de $[n+1]$ et donc :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}(E_k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k \text{ car } C_n^{n-k} = C_n^k \tag{1}$$

Démontrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n \leq n!$.
- $n = 0$. Trivial.
- Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k k! \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{\leq 1} \\ &\leq (n+1)! \end{aligned}$$

D'où l'hérédité.

1. Notons que la seule partition de $\emptyset$ étant $\{\emptyset\}$, on a $B_0 = 1$.
2. Il faut bien que je m'amuse de temps en temps ...

De fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, $0 \leq \dfrac{B_n}{n!}|z|^n \leq |z|^k$ donc R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série géométrique, à savoir 1. En particulier, R est strictement positif. Soit à présent $z \in (-R, R)$. Alors, par un changement d'indice :

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}$$

Par théorème de dérivation terme à terme pour les séries entières on obtient :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k \right) z^n \text{ par (1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n \end{aligned}$$

On reconnaît dans cette dernière expression le produit de Cauchy des séries $\Sigma \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$, toutes deux de rayon de convergence supérieur ou égal à R. De fait :

$$\forall z \in (-R, R), \quad f'(z) = f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = f(z) e^z \tag{2}$$

Résolvant (2) on trouve que :

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall z \in (-R, R), \quad f(z) = C e^{e^z}$$

Or $f(0) = 1$ donc $C = e^{-1}$ d'où :

$$f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z} = e^{e^z - 1}$$

(ii) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!}$$

On considère donc la série double[3] $\sum_{(n,k)} u_{n,k}$ où $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $u_{n,k} := \dfrac{(nz)^k}{n!k!}$. Alors, pour tout $n \geq 0$, la série $\sum_{(k)} |u_{n,k}|$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k |z|^k}{n!k!} = \frac{e^{n|z|}}{n!}$$

De fait, $\sum_{(n)} \sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}|$ converge. Par théorème de Fubini pour les séries doubles, $\sum_{(n,k)} u_{n,k}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k}$$

I.e :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{e} e^{e^z} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{n!k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{n!k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

3. Vous préféreriez que je vous parle de mesure de comptage sur $\mathbb{N}^2$? ... Là. Faites ce que l'on vous dit et il n'y aura pas de blessé.

Et donc, par unicité du développement en série entière de f sur $(-R, R)$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$$

Détails supplémentaires :

- L'expression de B_k trouvée en (ii) et les calculs menés lors de la démonstration de ce dernier point montrent que R est en fait égal à $+\infty$.

Références

[FGN07] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Algèbre 1 (2e édition)*. Cassini, 2007.