

Décomposition de Dunford

Arnaud GIRAND

11 décembre 2011

Référence :

- [FGN09] p.134–135 et [Gou94], p. 192

Leçons :

- 124 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 125 - Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- 128 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Prérequis :

- lemme des noyaux.

Proposition 1 (Dunford)

Soit \mathbb{K} un corps.

Soit E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que χ_f est scindé sur \mathbb{K} .

Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

- (i) d soit diagonalisable ;
- (ii) n soit nilpotent ;
- (iii) $f = d + n$;
- (iv) $n \circ d = d \circ n$.

De plus, d et n sont alors des polynômes en f .

DÉMONSTRATION :

- *Existence.* Comme χ_f est scindé on peut l'écrire sous la forme :

$$\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)_i^\alpha$$

Si on pose pour $i \in [s]$ $N_i := \ker(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$ on a alors par lemme des noyaux appliqué à χ_f :

$$E = \ker(\chi_f(f)) = \bigoplus_{i=1}^s N_i$$

On définit alors d et n de la façon suivante :

$$\forall i \in [s], \forall x \in N_i, \begin{cases} d(x) := \lambda_i x \\ n(x) := f(x) - \lambda_i x \end{cases}$$

Il est alors clair que $d + n = f$, que d est diagonalisable (prendre une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^s N_i$) et que :

$$\forall i \in [s], \forall x \in N_i, n^{\alpha_i}(x) = (f - \lambda_i \text{id}_E)_i^{\alpha_i}(x) = 0$$

Ainsi, si on pose $\alpha := \max_i(\alpha_i)$ et si on décompose $x \in E$ en $x = x_1 + \dots + x_s$, avec $\forall i \in [s], x_i \in N_i$ alors :

$$\begin{aligned} n^\alpha(x) &= n^\alpha\left(\sum_{i=1}^s x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^s n^\alpha(x_i) \text{ par linéarité} \\ &= 0 \text{ car } n^\alpha = 0 \text{ sur chaque } N_i \end{aligned}$$

Donc n est bien nilpotent.

Si on note, pour $i \in [s]$, p_i le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ on a de plus :

$$\begin{aligned} \forall x = x_1 + \dots + x_s \in E, \text{ les } x_i \in N_i, \sum_{i=1}^s \lambda_i \underbrace{p_i(x)}_{=x_i} &= \sum_{i=1}^s \lambda_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^s d(x_i) \\ &= d(x) \end{aligned}$$

I.e :

$$d := \sum_{i=1}^s \lambda_i p_i \tag{1}$$

Démontrons à présent que les p_i sont des polynômes en f . Pour $i \in [s]$ on définit le polynôme suivant :

$$Q_i := \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$$

Alors les Q_i sont premiers entre eux et donc par identité de Bézout il existe $U_1, \dots, U_s \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$\sum_{i=1}^s U_i Q_i = 1 \tag{2}$$

Posons $\forall i \in [s], f_i := U_i Q_i(f) = U_i(f) \circ Q_i(f)$ et montrons que $f_i = p_i$ ce qui donnera le résultat voulu. Fixons $i \in [s]$.

* Pour tous $i \neq j, \chi_f | Q_i Q_j$ donc :

$$\forall i \neq j f_i \circ f_j = U_i Q_i(f) \circ U_j Q_j(f) = U_i U_j(f) \circ Q_i Q_j(f) = 0 \tag{3}$$

Or d'après (2) :

$$f_i = \text{id}_E \circ f_i = \left(\sum_{j=1}^s U_j Q_j(f) \right) \circ f_i = \sum_{j=1}^s f_j \circ f_i = f_i^2$$

Donc les f_i sont bien des projecteurs.

* Montrons que $(\text{Im})(f_i) = N_i$.

Soit $y = f_i(x) \in (\text{Im})(f_i)$. Alors :

$$\begin{aligned} (f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}(y) &= (X - \lambda_i)^{\alpha_i}(f) \circ U_i Q_i(f) \\ &= U_i(f) \circ (X - \lambda_i)^{\alpha_i} Q_i(f) \\ &= U_i(f) \circ \chi_f(f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $y \in N_i$.

Réciproquement, si $x \in N_i$ alors par (2) on a $x = \sum_j f_j(x)$. Or, si $j \neq i f_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f) = 0$ car $(X - \lambda_i)^{\alpha_i} | Q_j$. In fine $x = f_i(x) \in \text{Im}(f_i)$.

* Montrons que $\ker(f_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$.

Si $j \neq i$ et $x \in N_j$ alors $f_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f) = 0$ car $(X - \lambda_j)^{\alpha_j} | Q_i$. La somme directe étant le sous espace vectoriel engendré par la réunion on a alors $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subset \ker(f_i)$.

Réciproquement, si $x \in E$ vérifie $f_i(x) = 0$ alors par (2) $x = \sum_{j \neq i} f_j(x)$. Or $\forall j \in s$, on a montré que $f_j(x) \in N_j$, d'où l'inclusion réciproque et le résultat.

En conclusion, $p_i = f_i$ est bien un polynôme en f et donc d et n le sont également. Ceci implique naturellement que d et n commutent.

- *Unicité.* Soient d' et n' vérifiant (i), (ii), (iii) et (iv). Comme d' (resp. n') commute avec n' (resp. d') (par hypothèse (iv)) et avec lui-même, il commute avec $f = d' + n'$ (hypothèse (iii)) donc avec les polynômes en f . En particulier d commute avec d' et n avec n' . Le premier résultat implique que d et d' sont co-diagonalisables et donc que $d - d'$ est diagonalisable, le second que $n' - n$ est nilpotente. De fait l'endomorphisme $d - d' = n' - n$ est diagonalisable et nilpotent, donc nul, d'où le résultat.

Détails supplémentaires :

- $n' - n$ est nilpotente. Supposons que $n^p = 0$ et $n'^q = 0$. Alors :

$$(n' - n)^{p+q} = \sum_{i=1}^{p+q} C_{p+q}^i n'^i (-1)^{p+q-i} n^{p+q-i} \text{ car } n \text{ et } n' \text{ commutent}$$

Or si $i < q$, $p+q-i > p$ et donc $n^{p+q-i} = 0$; et si $i \geq q$ alors $n'^i = 0$. In fine $(n' - n)^{p+q} = 0$ d'où le résultat (cf. [Gou94], p. 191).

Références

- [FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Algèbre 2 (2e édition)*. Cassini, 2009.
- [Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre*. Ellipses, 1994.