Théorème de Cauchy-Lipschitz

Référence : L. Schwartz, Analyse 2

Dans la suite, on considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = L(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{E}$$

où L est continue de $|a,b| \times \mathbb{R}^n$, $|a,b|$ intervalle (ouvert, fermé ou semi-ouvert) de $\mathbb{R}$.

Théorème 1 : de Cauchy-Lipschitz
On suppose la fonction L continue et globalement k-lipschitzienne en sa seconde variable.

Alors l'équation (E) admet une unique solution f sur $|a,b|$.

Démonstration. Partons d'une fonction f_0, et construisons une suite de fonction $(f_n)_n$ par récurrence :

$$f_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} L(\xi, f_n(t))\mathrm{d}\xi. \tag{1}$$

Lemme 2
La suite (f_n) vérifie, pour tout n :

$$\begin{cases} \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leqslant C\frac{k^n|t-t_0|^n}{n!} \\ \text{où } C \leqslant \sup_{t_0 \leqslant \xi \leqslant t} \|f_1(\xi) - f_0(\xi)\| \end{cases}$$

Démonstration. Le résultat est évident pour $n = 0$.

Supposons-le vrai pour $n \geqslant 0$.

Alors :

$$f_{n+2} - f_{n+1} = \int_{t_0}^{t} \left(L(\xi, f_{n+1}(t)) - L(\xi, f_n(t))\right) \mathrm{d}\xi,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|f_{n+2} - f_{n+1}\| &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|L(\xi, f_{n+1}(t)) - L(\xi, f_n(t))\| \, \mathrm{d}\xi \\ &\leqslant k \int_{t_0}^{t} \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \qquad \text{car } L \text{ lipschitzienne} \\ &\leqslant \frac{Ck^{n+1}}{n!} \int_{t_0}^{t} |\xi - t_0|^n \mathrm{d}\xi \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\leqslant C\frac{k^{n+1}|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$\diamond$

Ce lemme nous permet d'affirmer que la suite (f_n) est de Cauchy uniformément sur tout compact, et donc converge uniformément sur tout compact, vers une fonction f.

La continuité uniforme nous autorise à passer à la limite dans la définition des f_n, d'où :

$$f(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} L(\xi, f(\xi)) \mathrm{d}\xi,$$

ce qui est équivalent à (E).

On peut montrer le lemme suivant par récurrence sur n :

Lemme 3
Soient f_0 et g_0 deux fonctions, et (f_n) et (g_n) les suites définies par la relation (1) à partir des données initiales f_0 et g_0 respectivement.

Alors pour tout n :

$$\|f_n(t) - g_n(t)\| \leqslant C \frac{k^n |t - t_0|^n}{n!}.$$

Ce lemme nous montre que la limite f est indépendant du choix de f_0.

Soit $\hat{f}$ une autre solution de (E). En considérant la suite définie par $f_0 = \hat{f}$ et la relation (1), on obtient $f_n = \hat{f}$, et donc $\hat{f} = f$.

D'où l'unicité. $\square$

Exemple – Si L n'est pas lipschitzienne, on perd l'unicité : on peut par exemple prendre $L(t, y) = 3y^{2/3}$.

L n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0, et si $c_1 < 0 < c_2$, la fonction définie par

$$y(t) = \begin{cases} (t - c_1)^3 & \text{pour } t \leqslant c_1 \\ 0 & \text{pour } c_1 < t < c_2 \\ (t - c_2)^3 & \text{pour } c_2 \leqslant t \end{cases}$$

est solution de $y' = L(t, y)$ avec $y(0) = 0$.

Remarque – Cette version de la démonstration ne réutilise pas le théorème du point fixe de Picard. En fait, on peut adapter pour l'utiliser (magouille, ô magouille) pour la leçon en question, en montrant directement :

Si $\Phi\ : g \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{\cdot} L(\xi, g(\xi)) \mathrm{d}\xi$, alors Φ vérifie pout tout p :

$$\|\Phi^p(g_1)(t) - \Phi^p(g_2)(t)\| \leqslant \frac{k^p |t - t_0|^p}{p!} \|g_1 - g_2\|_\infty.$$

Donc pour p assez grand, Φ^p est contractante et donc admet un unique point fixe. (en fait, c'est là que c'est pénible si a ou b est ∞ : il faut construire la suite et la faire converger sur tout compact).

Remarque – On montre ici le théorème avec L *globalement* lipschitzienne. On peut mentionner que le cas *localement* lipschitzien se fait de la même manière, avec un cylindre de sécurité pour pas sortir des ensembles de définition des fonctions.