

Langage de pile d'un automate à pile

Théorème 1

On considère un automate à pile $\mathcal{A} = (\Sigma, \Gamma, Q, \delta, \gamma_0, F)$.

Soit $H = \{\gamma \in \Gamma^* \mid \exists f \in \Sigma^*, \exists q \in Q, (q_0, \gamma_0) \xrightarrow{f} (q, \gamma)\}$ le langage de pile de \mathcal{A} .

Alors H est rationnel.

Démonstration. On pose $A_n = \{a_1, \dots, a_n, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ et on définit une relation \rightarrow sur A_n^* par :

$$w \rightarrow w' \Leftrightarrow \exists i, \exists u, v \in A_n^*, w = ua_i\bar{a}_i v \text{ et } w' = uv.$$

On remarque que la relation \rightarrow est noetherienne (il n'y a pas de chaîne infinie, car la longueur des mots est strictement décroissante), et confluente (si $x \rightarrow^* y$ et $x \rightarrow^* y'$, alors il existe z tel que $y \rightarrow^* z$ et $y' \rightarrow^* z$).

Donc pour tout w , il existe un unique mot $\rho(w)$ minimal pour \rightarrow .

On a alors le lemme :

Lemme 2

$$\{w \mid \rho(w) = \varepsilon\} = D_n^*.$$

Démonstration. " \subseteq " : Soit w tel que $\rho(w) = \varepsilon$, et soit k tel que $w \rightarrow^k \varepsilon$.

Si $k = 0$, alors $w = \varepsilon$ et donc $w \in D_n^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout w , $w \rightarrow^k \varepsilon \Rightarrow w \in D_n^*$. Soit w tel que $w \rightarrow^{k+1} \varepsilon$. Alors il existe w' de la forme uw de taille $2k$ tel que $w' \rightarrow^k \varepsilon$, et tel que $w = ua_i\bar{a}_i v$. Alors $w \in D_n^*$.

" \supseteq " : Évident par définition de \rightarrow (une récurrence sur la longueur convaincra les sceptiques).

◇

On définit maintenant la substitution σ sur A_n^* par $\sigma(a) = D_n^* a D_n^*$.

On a alors le lemme :

Lemme 3

Pour tout $w \in A_n^*$,

$$\sigma(w) = \{w' \mid w' \rightarrow^* w\}.$$

Démonstration. " \subseteq " : Soit $w = w_1 \dots w_k$. Alors $\sigma(w) = D_n^* w_1 D_n^* \dots D_n^* w_k D_n^*$.

Soit $w' \in \sigma(w)$. Alors, par le lemme précédent, $w' \rightarrow^* w$.

" \supseteq " : Par récurrence sur la longueur de la réduction $w' \rightarrow^p w$:

Le cas $p = 0$ est trivial.

Soit p tel que tout mot w' vérifiant $w' \rightarrow^p w$ soit dans $\sigma(w)$. Soit w' tel que $w' \rightarrow^{p+1} w$.

Alors il existe \hat{w} vérifiant

- $w' \rightarrow \hat{w}$
- $\hat{w} \rightarrow^p w$
- $\hat{w} = uv$
- $w' = ua_i\bar{a}_i v$

Par hypothèse de récurrence, \hat{w} est de la forme $d_1 w_1 \dots d_k w_k d_{k+1}$, avec les d_i dans D_n^* .

Alors u est de la forme $d_1 w_1 \dots d_j$ (resp. $d_1 w_1 \dots d_j w_j$) et v de la forme $w_j \dots w_k d_{k+1}$ (resp. $d_{j+1} \dots w_k d_{k+1}$).

w' est donc de la forme

$d_1 w_1 \dots d_j a_i \bar{a}_i w_j \dots w_k d_{k+1}$ (resp. $d_1 w_1 \dots d_j w_j a_i \bar{a}_i d_{j+1} \dots w_k d_{k+1}$), ce qui conclut la récurrence car $d_j a_i \bar{a}_i$ (resp. $a_i \bar{a}_i d_{j+1}$) est dans D_n^* .

◇

Lemme 4

Pour tout rationnel K sur A_n^* , le langage $\rho(K) = \{\rho(w) \mid w \in K\}$ est rationnel.

Démonstration. Un mot w est dans $\rho(K)$ si et seulement si il est irréductible pour \rightarrow , et si il existe $w' \in K$, tel que $w' \rightarrow^* w$.

Donc

$$\rho(K) = \sigma^{-1}(K) \setminus \left(\sum_{i=1}^n A_n^* a_i \bar{a}_i A_n^* \right).$$

Par stabilité des langages rationnels, $\rho(K)$ est rationnel.

◇

On va maintenant montrer que le miroir \tilde{H} de H est rationnel, ce qui impliquera que H est rationnel.

On suppose que dans l'automate \mathcal{A} , l'alphabet de pile est $\Gamma = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Pour une transition $\tau = q, \gamma \xrightarrow{y} q', h$ dans \mathcal{A} , on définit $\mu(\tau) = \bar{\gamma} \tilde{h}$, que l'on étend à δ^* .

On dit que deux transitions τ et τ' sont *consécutives* si l'état d'arrivée de τ est le même que l'état de départ de τ' .

On appelle K l'ensemble des suites de transitions de \mathcal{A} consécutives.

K est clairement rationnel, car reconnu par l'automate \mathcal{A} auquel on enlève la pile.

On a alors

$$\tilde{H} = \rho(\gamma_0 \mu(K)) \cap \Gamma^*.$$

Par le lemme précédent, et stabilité des langages rationnels, \tilde{H} est rationnel.

□

Références : Carton, Langages formels, calculabilité et complexité.

Leçons : 909, 911