# Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

Référence : M. Alessandri,
*Thèmes de géormétrie, groupes en situation géométrique*

2011-2012

Dans la suite, $G$ sera un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Le théorème à démontrer est :

**Théorème 1**
*Il existe un produit scalaire euclidien $(\cdot \mid \cdot)$ sur $\mathbb{R}^n$ de forme quadratique associée $q$, tel que $G$ soit inclu dans l'ellipsoïde associé à $q$ :*

$$G \subseteq \mathscr{O}(q).$$

*Démonstration.* Soit $\mathscr{V}$ un espace vectoriel de dimension $n$. Commençons par montrer un lemme sur l'enveloppe convexe d'un compact :

**Lemme 2**
*L'enveloppe convexe d'un compact de $\mathscr{V}$ est compacte.*

*Démonstration.* Soit $K$ un compact de $\mathscr{V}$ non vide, et soit $\mathrm{Conv}(K)$ son enveloppe convexe. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\beta_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ et } \forall i,\ (\lambda_i, x_i) \in \mathbb{R}^+ \times K \right\}.$$

Le lemme de Caratheodory nous donne $\mathrm{Conv}(K) = \beta_{n+1}$.

On pose $\Lambda_{n+1} = \left\{ (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$, et

$$P : \begin{array}{ccc} \Lambda_{n+1} \times K^{n+1} & \longrightarrow & \mathrm{Conv}(K) \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{array}.$$

$P$ est polynomiale donc continue, et le lemme de Carathéodory nous montre qu'elle est surjective. $\Lambda_{n+1}$ est compact dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et donc $\Lambda_{n+1} \times K^{n+1}$ est compact aussi.

Donc $\mathrm{Conv}(K)$ est l'image d'un compact par une application continue, donc est compact. $\Diamond$

Soit $K$ un compact convexe de $\mathscr{V}$, et soit $V$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $K$ soit stable par $V$.

Alors :

**Lemme 3**
*$V$ admet un point fixe dans $K$.*

*Démonstration.* On choisit un $x_0$ dans $K$, et on pose

$$x_k = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} V^i(x_0).$$

$K$ est stable par $V$, donc $x_k \in K$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $K$ est compact, on peut donc supposer que $x_k$ converge, à extraction près, vers un élément $x \in K$. On a donc

$$Vx_k = x_k + \underbrace{\frac{1}{k+1}(V^{k+1}x_0 - x_0)}_{:=\varepsilon_k}.$$

$K$ est compact donc borné, et donc $\varepsilon_k$ tend vers 0 avec $k$.

Donc, en passant à la limite, on a $Vx = x$. $\Diamond$

Soit maintenant $\mathscr{G}$ un sous-groupe compact de $GL(\mathscr{V})$. On pose, pour tout $x$ de $\mathscr{V}$, $\nu(x) = \max_{U\in\mathscr{G}} \|Ux\|$, où $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne sur $\mathscr{V}$. Alors

**Lemme 4**
*$\nu$ est une norme $\mathscr{G}$-invariante,* i.e *si $U \in \mathscr{G}$, alors $\nu(Ux) = \nu(x)$.*

*Démonstration.* $\nu$ est bien définie par compacité, est $\mathscr{G}$-invariante car $\mathscr{G}$ est un groupe, et est bien homogène et définie positive. Montrons l'inégalité triangulaire : Soient $x$ et $y$ dans $\mathscr{V}$, et soit $u_0$ dans $\mathscr{G}$ tel que $\nu(x+y) = N(u_0(x+y))$. Alors

$$\begin{aligned}\nu(x+y) &= \|u_0(x) + u_0(y)\| \\ &\leqslant \|u_0(x)\| + \|u_0(y)\| \\ &\leqslant \nu(x) + \nu(y)\end{aligned}$$

Donc $\nu$ est bien une norme $\mathscr{G}$-invariante sur $\mathscr{V}$.

On remarque que le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire équivaut à celui de $\|\cdot\|$, *i.e* la dépendance positive des deux vecteurs. $\Diamond$

On peut maintenant établir :

**Lemme 5**
*On suppose que tous les éléments de $\mathscr{G}$ laissent $K$ stable. Alors il existe un point fixe dans $K$ commun à tous les éléments de $\mathscr{G}$.*

*Démonstration.* Pour $U \in \mathscr{G}$, on pose $F_U = \{x \in K \mid Ux = x\}$. On cherche un élement dans $\displaystyle\bigcap_{U\in\mathscr{G}} F_U$.

$(F_U)$ est une famille de fermés dans le compact $K$, il suffit de montrer que les intersections finies de $F_U$ sont non vides :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall U_1, \ldots, U_p \in \mathscr{G},\ \bigcap_{i=1}^{p} F_{U_K}.$$

Soient donc $p \in \mathbb{N}^*$ et $U_1, \dots, U_p \in \mathscr{G}$. On pose $V = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} U_i$. $K$ est convexe, et donc est laissé stable par $V$, et donc $V$ admet un point fixe $x$ dans $K$. On a alors

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \nu(Vx) \\ &\leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \nu(U_k x) \\ &\leqslant \nu(x) \end{aligned}$$

D'après le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, tous les $U_k x$ sont positivements liés, et valent même $x$.

Donc l'intersection finie est non vide, d'où le lemme. $\Diamond$

Passons maintenant à la preuve :

On considère l'application

$$\rho : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL(\mathscr{S}_n) \\ X & \longmapsto & S \mapsto {}^t XSX \end{array}.$$

$\rho$ est alors un morphisme de groupes, continu car polynomial en les coefficients de la matrice.

$\mathscr{G} = \rho(G)$ est donc un sous groupe compact de $GL(\mathscr{S}_n)$ (par continuité de $\rho$ et compacité de $G$).

$G$ est compact, donc $\{{}^t MM \mid M \in G\}$ est compact non vide dans le convexe $\mathscr{S}_n^{++}$, et donc son enveloppe convexe $K$ aussi.

$K$ est clairement $\mathscr{G}$-stable, et donc il existe un élément $S \in K$ fixe par tous les éléments de $\mathscr{G}$.

Donc $S \in \mathscr{S}_n^{++}$, et $\forall A \in G,\ {}^t ASA = S$.

Donc, en notant $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ défini par $(x \mid y) = \langle x, Sy \rangle$ et $q$ la forme quadratique associée, on a pour $M \in G$ :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(Mx) &= (Mx \mid SMx) \\ &= (x \mid {}^t MSMx) \\ &= (x \mid Sx) \\ &= q(x) \end{aligned}$$

Donc $M \in \mathscr{O}(q)$.

Donc $G \subseteq \mathscr{O}(q)$. $\square$