Théorème de Féjer

Références :

– Hirch-Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle* 1997. (p.32, exercice 2c)
– Zuily-Queffélec, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*

Développement :

Contexte : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{C}$, et 2π-périodique. Soient D_n et K_n les fonctions définies par :

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \qquad K_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} D_n(x)$$

Si $h, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T},\mathbb{C})$, on note ici

$$(h * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

Théorème 1 (*de* Féjer)

Toute fonction continue, 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Ce qui s'énonce aussi : $(x \mapsto e^{ikx})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille totale de $(\mathcal{C}^0(\mathbb{T},\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

(1) – Le noyau de Féjer.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$K_m(x) = \begin{cases} m & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{1-\cos(mx)}{m(1-\cos(x))} & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $K_m(x) \geq 0$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $K_m(-x) = K_m(x)$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

(e) Pour tout $\varepsilon \in]0,\pi[$,

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(f) Pour tout $\varepsilon \in]0,\pi[$,

$$\int_{[-\pi,-\varepsilon[\cup]\varepsilon,\pi]} K_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(a) : On remarque que, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$K_m(2k\pi) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{p=-n}^{n} e^{2ikp\pi} = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} 2n+1 = \frac{m^2}{m} = m$$

et de plus pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}\left(e^{-inx}\sum_{p=0}^{2n} e^{ipx}\right)\\
&= \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}\left(e^{-inx}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}\right)\\
&= \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{e^{-inx}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right)\\
&= \frac{1}{m}\left(\sum_{n=0}^{m-1}\frac{e^{-inx}}{1-e^{ix}} - \sum_{n=0}^{m-1}\frac{e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right)\\
&= \frac{1}{m}\left(\sum_{n=0}^{m-1}\frac{e^{-inx}}{1-e^{ix}} - \sum_{n=0}^{m-1}\frac{e^{inx}}{e-ix-1}\right)\\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1-e^{-imx}}{1-e^{-ix}}\frac{1}{1-e^{ix}} - \frac{1-e^{imx}}{1-e^{ix}}\frac{1}{e^{-ix}-1}\right)\\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1-e^{-imx}}{2-2\cos(x)} - \frac{1-e^{imx}}{2\cos(x)-2}\right)\\
&= \frac{1-\cos(mx)}{m(1-\cos(x))}
\end{aligned}$$

(b) et **(c)** se déduisent directement de **(a)**.

(d) : De plus on vérifie que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,\mathrm{d}x = \delta_{0,k}$, ainsi par linéarité $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$ et finalement $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

(e) : Enfin pour $x \in]\varepsilon,\pi[$, $|1-\cos(x)| \geq |1-\cos(\varepsilon)|$ et donc :

$$|K_n(x)| \leq \frac{1}{n}\frac{|1-\cos(nx)|}{|1-\cos(x)|} \leq \frac{1}{n}\frac{2}{|1-\cos(\varepsilon)|}$$

Donc comme K_n et cette constante sont intégrables sur le compact $[\varepsilon,\pi]$, par théorème de convergence dominée,

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

.

(f) se déduit immédiatement de **(e)** et **(b)**.

(2) – Produit de convolution :

$$(K_n * f)(x) - f(x) = (f * K_n)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y - \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)f(x)\,\mathrm{d}y\right)$$

Ainsi, $|(K_n*f)(x)-f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)|f(x-y)-f(y)|$. On veut montrer que cette quantité tend vers 0 quand $n \to \infty$ et ce indépendamment de x. Soit donc $\varepsilon > 0$.

f est continue sur le compact $[-2\pi, 2\pi]$ donc uniformément continue : $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x, z \in [-2\pi, 2\pi]$, $|x-z| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(z)| < \varepsilon/2$. En particulier pour $z = x-y \in [-2\pi, 2\pi]$, on peut considérer un tel η.

On peut découper l'intégrale de la manière suivante :

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}y = \int_{-\eta}^{\eta} K_n(y)|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}y + \int_{[-\pi,-\eta[\cup]\eta,\pi]} K_n(y)|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}y$$

D'où

$$(2\pi)|(K_n * f)(x) - f(x)| \leq \int_{-\eta}^{\eta} K_n(y)\varepsilon/2\,\mathrm{d}y + \int_{[-\pi,-\eta[\cup]\eta,\pi]} K_n(y) 2\|f\|_\infty\,\mathrm{d}y \leq \frac{\varepsilon}{2}\int K_n + 2\|f\|_\infty \int_{[-\pi,-\eta[\cup]\eta,\pi]} K_n$$

Or d'après le point **(f)**, la deuxième intégrale tends vers 0 donc il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, cette intégrale soit majorée par $\varepsilon/(4\|f\|_\infty)$, et d'après **(d)**, $\int K_n = 1$, d'où :

$$(2\pi)|(K_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{2\|f\|_\infty \varepsilon}{4\|f\|_\infty} \leq \varepsilon$$

D'où le résultat.

(3) – Polynômes trigonométriques On note pour f fixé, $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_n(f) e^{ikx}$. Or

$$(D_n * f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)} f(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k=n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky} f(y)\,\mathrm{d}y\right) e^{ikx} = S_n(x)$$

Et donc par linéarité :

$$(K_m * f)(x) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} S_n(x)$$

C'est donc une suite de polynômes trigonométriques, qui converge uniformément vers f, ce qui démontre le théorème.

Recasements : (according to Marnat)

- 240 - Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.
- 246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.