Problème de la ruine du joueur

Arnaud Girand

20 décembre 2011

Référence :
- [Ouv00], p.394–398

Leçons :
- 249 - Suites de variables de Bernoulli indépendantes.
- 251 - Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.
- 252 - Loi binomiale. Loi de Poisson. Applications.

Prérequis :
- décomposition de Doob ;
- premier théorème d'arrêt ;
- martingales équi–intégrables.

On considère le problème suivant : *un joueur compulsif joue à pile où face avec une pièce truquée. S'il obtient pile, la banque lui donne un euro et s'il obtient face il donne un euro à la banque. Le joueur étant compulsif il joue jusqu'à sa propre ruine ou celle de la banque.*

Modèle :

On note $a \in \mathbb{N}^*$ (resp. $b \in \mathbb{N}^*$) la fortune initiale du joueur (resp. de la banque) et p la probabilité d'obtenir pile en lançant la pièce. On se place alors sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on se donne une suite $(Y_n)_n$ de variables aléatoires i.i.d de loi $p\delta_1 + q\delta_{-1}$ (avec bien entendu $q = 1 - p$), la variable Y_n représentant l'impact de la n–ième partie sur le pécule du joueur. On peut alors modéliser sa fortune au bout n parties par le processus aléatoire suivant :

$$\forall n \geq 0,\ S_n := a + \sum_{j=1}^{n} Y_j$$

Si on pose $Y_0 := a$ les filtrations $(\sigma(S_i \,|\, 0 \leq i \leq n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma(Y_i \,|\, 0 \leq i \leq n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales : notons les (la ?) $(\mathcal{A}_n)_n$. On définit enfin le temps d'arrêt T du jeu :

$$T := \inf\{n \geq 1 \,|\, S_n \in \{0, a+b\}\}$$

On cherche à calculer la probabilité $\rho := \mathbb{P}(S_T = a + b)$ de non–ruine du joueur, ainsi que la probabilité $\mathbb{P}(T < \infty)$ que la partie s'achève un jour et sa durée moyenne $\mathbb{E}(T)$ le cas échéant.

Étude :
- *Nature du processus S.*

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1,\ \mathbb{E}(S_n|\mathcal{A}_{n-1}) &= a + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(Y_j|\mathcal{A}_{n-1}) \\ &= a + \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{\mathbb{E}(Y_j|\mathcal{A}_{n-1})}_{=Y_j \text{ car } Y_j\in m(\mathcal{A}_{n-1})} + \underbrace{\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{A}_{n-1})}_{=Y_n \text{ car } Y_n \perp \mathcal{A}_{n-1}} \\ &= S_{n-1} + p - q\end{aligned}$$

De fait S est une martingale (resp. sous, sur) si $p = q = \dfrac{1}{2}$ (resp. $p > q$, $p < q$) intégrable.

– *Cas* $p \neq q$. Par exemple, supposons que $p > q$ (S est alors une sous–martingale). On définit le processus aléatoire suivant :

$$A_0 := 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n - A_{n-1} := \mathbb{E}(S_n - S_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1})\text{i.e (par récurrence)}A_n = n(p-q)$$

Il est alors évident que $(A_n)_n$ est un processus croissant prévisible. Par décomposition de Doob [1] on a alors que $M := S - A$ est une martingale intégrable. Pour $n \geq 0$, le premier théorème d'arrêt appliqué à la martingale M et au temps d'arrêt borné $T \wedge n$ s'écrit alors :

$$\mathbb{E}(S_0) = \mathbb{E}(M_{T\wedge n}) \text{ i.e } a = \mathbb{E}(S_{T\wedge n}) - (p-q)\mathbb{E}(T \wedge n)$$

De fait comme $\mathbb{E}(S_{T\wedge n}) \leq a + b$ par construction on a :

$$0 \leq (p-q)\mathbb{E}(T \wedge n) \leq b \tag{1}$$

Commençons par remarquer que $T\wedge n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$ p.s. En effet, sur $\{T = \infty\}$, $T\wedge n = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ et si $\omega \in \{T < \infty\}$ il va exister $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $n \geq T(\omega)$ i.e $(T \wedge n)(\omega) = T(\omega)$ et donc $(T \wedge n)(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} T(\omega)$, d'où le résultat.
La suite $(T \wedge n)$ étant croissante, positive, intégrable et convergeant vers T p.s, le théorème de Beppo–Levi nous affirme que $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(T \wedge n) = \mathbb{E}(T)$. En passant à la limite (sup) dans (1) on obtient alors que $T \in L^1$ ergo $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. De plus, pour tout $k, n \geq 1$, $S_{T\wedge n}1_{\{T=k\}} = S_{k\wedge n} = S_k$ pour n assez grand, i.e $S_{T\wedge n}1_{\{T=k\}} = S_T 1_{\{T=k\}}$ et donc $S_{T\wedge n} \xrightarrow[n\to\infty]{} S_T$ p.s.
En appliquant le théorème de convergence dominée (combiné à Beppo-Levi, cf supra) avec domination $0 \leq S_{T\wedge n} \leq a + b$ dans (1) on obtient [2] de fait :

$$0 \leq (p-q)\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(S_T) - a \tag{2}$$

Par définition de T on a également :

$$\mathbb{E}(S_T) = (a+b)\mathbb{P}(S_T = a+b) + 0\mathbb{P}(S_T = 0) = (a+b)\rho$$

D'où, via (2), $\mathbb{E}(T) = \dfrac{(a+b)\rho - a}{p-q}$.

Posons à présent $\forall n \geq 0$, $U_n := \left(\dfrac{q}{p}\right)^{S_n}$. Alors U est une martingale. En effet :

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1,\ \mathbb{E}(U_n|\mathcal{A}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}}\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n}\middle|\mathcal{A}_{n-1}\right)\\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}}\mathbb{E}\left((\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n}\middle|\mathcal{A}_{n-1}\right) \text{ car } \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \in m(\mathcal{A}_{n-1})\\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}}\mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n}\right) \text{ car } \left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n} \perp Ar_{n-1}\\
&= U_{n-1}\left(\frac{q}{p}p + \frac{p}{q}q\right)\\
&= U_{n-1}
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{q}{p} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{T\wedge n} \in [0, 1]$ et donc :

$$\forall a \geq 1, \int_{|U_{T\wedge n}|>a} |U_{T\wedge n}| d\mathbb{P} = 0$$

Ce qui signifie que la martingale arrêtée $U^T := (U_{T\wedge n})$ est équi–intégrable donc converge dans L^1 et $\mathbb{P}$–p.s vers une variable aléatoire X. Or $S_{T\wedge n} \xrightarrow[n\to\infty]{} S_T$ p.s donc on a nécessairement $X = U_T$. Remarquons à présent que :

$$\mathbb{E}(U_T) = \left(\frac{q}{p}\right)^0 \mathbb{P}(S_T = 0) + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} \mathbb{P}(S_T = a+b)$$

1. Le processus croissant prévisible dans cette dernière étant nécessairement le processus des accroissements.
2. En "passant à la limsup".

I.e :

$$\mathbb{E}(U_T) = 1 - \rho + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} \rho \tag{3}$$

En outre, par le premier théorème d'arret on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(U_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(U_0) = \left(\frac{q}{p}\right)^{a}$$

Et appliquant le théorème de convergence dominé à $U_{T\wedge n} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} \in L^1$ on obtient :

$$\mathbb{E}(U_T) = \left(\frac{q}{p}\right)^{a}$$

En utilisant les égalités (2) et (3) on obtient alors le résultat recherché :

$$\rho := \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} \text{ et } \mathbb{E}(T) = \frac{1}{p-q}\left((a+b)\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} - a\right)$$

– *Cas* $p = q = \frac{1}{2}$. Les Y_n étant L^∞, S est alors une martingale L^2. On définit un processus aléatoire B comme suit :

$$B_0 := 0 \text{ et } \forall n \geq 1,\ B_n - B_{n-1} := \mathbb{E}((S_n - S_{n-1})^2 | \mathcal{A}_{n-1}) = \mathbb{E}(Y_n^2 | \mathcal{A}_{n-1})$$

Le processus B est alors croissant prévisible et comme $Y_n^2 \perp \mathcal{A}_{n-1}$ alors $B_n - B_{n-1} = \mathbb{E}(Y_n^2) = p+q = 1$, d'où $\forall n \geq 0,\ B_n = n$.
Par décomposition de Doob, comme S^2 est une sous–martingale, le processus $(S_n^2 - n)_n$ est alors une martingale et on obtient en lui appliquant le premier théorème d'arrêt que :

$$\forall n \geq 0,\ a^2 = \mathbb{E}(S_0^2 - 0) = \mathbb{E}(S_{T\wedge n}^2 - T \wedge n) \tag{4}$$

Comme $S_{T\wedge n}^2 \leq (a+b)^2$ on a :

$$\mathbb{E}(T \wedge n) = \mathbb{E}(S_{T\wedge n}^2) - a^2 \leq (a+b)^2 - a^2$$

En procédant exactement comme dans le cas $p \neq q$ on montre (en utilisant Beppo–Levi) que $\limsup_n \mathbb{E}(T \wedge n) = \mathbb{E}(T)$ d'où par passage à la limite $\mathbb{E}(T) \leq (a+b)^2 - a^2$. De fait $T \in L^1$ et donc $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ ce qui nous permet, toujours de façon analogue au cas précédent, de conclure que $S_{T\wedge n} \xrightarrow[n\to\infty]{} S_T$. En appliquant le théorème de convergence dominée, avec domination $0 \leq S_{T\wedge n} \leq a + b$ on obtient que $(S_{T\wedge n})_n$ converge dans L^1 et L^2 vers S_T.
Par premier théorème d'arrêt on a également que $\mathbb{E}(S_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(S_0) = a$ donc en passant à la limite on trouve $\mathbb{E}(S_T) = a$. Or $\mathbb{E}(S_T) = (a+b)\rho$ ergo :

$$\rho = \frac{a}{a+b}$$

Pour finir, remarquons que l'on peut à présent passer à la limite dans (4), obtenant :

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(S_T^2) - a^2$$

Or :

$$\mathbb{E}(S_T^2) = (a+b)^2\rho = a(a+b)$$

D'où le résultat :

$$\mathbb{E}(T) = ab$$

Détails supplémentaires :

- *Motivation du choix de* U.Fixons $s > 0$ et posons $\forall n \geq 0$, $U_n := s^{S_n}$. Recherchons pour quelle(s) valeur(s) de s ce processus définit une martingale.

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1,\ \mathbb{E}(U_n|\mathcal{A}_{n-1}) &= \mathbb{E}(s^{S_{n-1}} s^{Y_n}|\mathcal{A}_{n-1}) \\
&= s^{S_{n-1}}\mathbb{E}(s^{Y_n}|\mathcal{A}_{n-1}) \text{ car } s^{S_{n-1}} \in m(\mathcal{A}_{n-1}) \\
&= s^{S_{n-1}}\mathbb{E}(s^{Y_n}) \text{ car } s^{Y_n} \perp Ar_{n-1} \\
&= U_{n-1}\left(sp + \frac{1}{s}q\right)
\end{aligned}$$

  Or :

$$sp + \frac{1}{s}q = 1 \Leftrightarrow s^2p - s + q = 0 \Leftrightarrow s \in \left\{1, \frac{q}{p}\right\}$$

  Si $s = 1$, la martingale U est remarquablement peu intéressante [3], tandis que so $s = \dfrac{q}{p}$ elle est non constante. On choisit donc $s := \dfrac{p}{q}$.

- *Rappel.* On dit qu'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de v.a est équi–intégrable si :

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{|X_i|>a} |X_i| d\mathbb{P} = 0$$

Références

[Ouv00] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités 2.* Cassini, 2000.

3. Mais d'une facilité d'étude assez déconcertante, vous en conviendrez.