Simplicité de A_n

8 novembre 2011

Simplicité de $\mathcal{A}_5$

Les éléments d'ordre 3 (respectivement d'ordre 5) (qui sont les 3 et 5-cycles) sont respectivement tous conjugués dans $\mathcal{A}_5$ car ils forment des p-Sylow et que les p-Sylow sont tous conjugués. Les éléments d'ordre 2 sont conjugués dans $\mathcal{A}_5$ car ce sont des doubles transpositions et que si on prend $s_1 = (a,b)(c,d)(e)$ et $s_2 = (a',b')(c',d')(e')$ deux d'entre elles, et soit σ une permutation qui envoie a sur a', b sur b' et e sur e'. On peut alors envoyer $\{c,d\}$ sur $\{c',d'\}$ de sorte que $\sigma \in \mathcal{A}_5$, et $\sigma s_1 \sigma^{-1} = s_2$. Ceci indique qu'un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_5$ qui contient un élément d'ordre p les contient tous.

$\mathcal{A}_5$ possède :
- $(5-1)! = 24$ 5-cycles (ses éléments d'ordre 5)
- $2\binom{5}{3} = 20$ 3-cycles (ses éléments d'ordre 3) (penser que les coefficients binomiaux ne prennent pas compte de l'ordre)
- $\frac{1}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 15$ éléments d'ordre 2. (penser que lorsque l'on choisi 2 parmi 5 puis 2 parmi 3 on peut tomber sur des doublons)

Soit $H \triangleleft \mathcal{A}_5$ non trivial, son cardinal divise 60, donc nécessairement il doit comporter, en plus du neutre, un type d'élément. Comme ni 25 ni 16 ni 21 ne divise 60 il contient au moins deux types d'élément et son cardinal est donc supérieur à 36, autrement dit c'est $\mathcal{A}_5$ tout entier, qui se révèle donc simple.

$n \geq 5$ quelconque

On va se ramener au cas $n = 5$ par une permutation du sous-groupe n'agissant que sur 5 éléments.

Soient $H \triangleleft \mathcal{A}_n$, $\sigma \in H \smallsetminus \{e\}$ et soit $a \in [|1,n|]$ tel que $b = \sigma(a) \neq a$, enfin soit $c \notin \{a, b, \sigma(b)\}$ et $\tau = (acb)$. On a

$$\begin{aligned} \rho &= (\tau\sigma\tau^{-1})\sigma^{-1} \in H \\ &= \tau(\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}) \\ &= (acb)(\sigma(abc)\sigma^{-1} \\ &= (acb)\left(\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\right) \end{aligned}$$

Ainsi $T := \{a, b, \sigma(b), c, \sigma(c)\} = Supp(\rho)$ donc $|supp(\rho)| \leq 5$, et $\rho(b) \neq b$ donc $\rho \neq e$. Quitte a rajouter des éléments dans T, on peut supposer que $|T| = 5$. Considérons le morphisme i

d'injection de $\mathcal{A}_5$ dans $\mathcal{A}_n$ qui envoie s sur la permutation de $\mathcal{A}_n$ agissant sur T comme s et étant l'identité sur son complémentaire. La pré-image de H par i est distinguée dans $\mathcal{A}_5$ et non réduit à $\{e\}$ (car $i^{-1}(\rho) = \rho_{|T} \neq Id_T$) donc égal à $\mathcal{A}_5$. Elle contient en particulier un 3-cycle, donc H contient un 3-cycle et les contient tous puisque ceux-ci sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$. Or $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles, et finalement $H = \mathcal{A}_n$.

Lemme 1

$\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

Dém : Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$, σ s'écrit comme un produit pair de transposition (car les transpositions engendrent le groupes des permutations et que la signature de σ est 1). Montrons que cette écriture peut se ramener à un produit de 3 cylces.

- $(ab)(ab) = Id$.
- $(ab)(bc) = (abc)$
- $(ab)(cd) = (ab)(bc)(bc)(cd) = (abc)(bcd)$

Comme chaque cas consomme deux transpositions, nous avons ce que nous voulions.

Référence :

Perin, *Algèbre*