Théorème de Müntz

Kevin Quirin

Leçons :
– Déterminants
Prérequis :
– Distance à un sous-espace en fonction de déterminants de Gram
– Déterminants de Cauchy
– Théorème de Stone-Weierstraß

Théorème 0.1
Soit $\mathscr{C}$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels positifs.

Alors on a l'équivalence :

(i) $V := \mathrm{Vect}\left((x \mapsto x^{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}\right)$ *est dense dans* $\mathscr{C}$.

(ii) La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\alpha_n}$ *diverge.*

Démonstration. Par souci de clarté, on notera simplement x^a la fonction $x \mapsto x^a$.

Pour $m \in \mathbb{R}^+$, on note $\Delta_N(m)$ la distance de x^m à $\mathrm{Vect}\,(x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_N})$. On a donc, avec les déterminants de Gram :

$$\Delta_N(m)^2 = \frac{\mathrm{Gram}\,(x^m, x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_N})}{\mathrm{Gram}\,(x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_N})}.$$

Or, pour tous a et b, on a $\langle x^a, x^b\rangle = \frac{1}{a+b+1}$.

Donc :

$$\mathrm{Gram}\,(x^m, x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_N}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2m+1} & \frac{1}{m+\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{m+\alpha_N+1} \\ \frac{1}{m+\alpha_1+1} & \frac{1}{2\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\alpha_N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{m+\alpha_N+1} & \frac{1}{\alpha_N+\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{2\alpha_N+1} \end{vmatrix}$$

On a donc, d'après le calcul du déterminant de Cauchy :

$$\mathrm{Gram}\,(x^m, x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_N}) = \frac{\left(\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2\right)\left(\prod_i(\alpha_i-m)\right)}{(2m+1)\left(\prod_{i<j}(\alpha_i+\alpha_j+1)\right)\left(\prod_i(\alpha_i+m+1)^2\right)}$$

et, de la meme façon :

$$\mathrm{Gram}\left(x^{\alpha_1},\dots,x^{\alpha_N}\right)=\frac{\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2}{\prod_{i<j}(\alpha_i+\alpha_j+1)}.$$

Finalement, on a l'expression de la distance cherchée :

$$\Delta_N(m)=\frac{1}{\sqrt{2m+1}}\prod_{i=1}^{N}\left|\frac{\alpha_i-m}{\alpha_i+m+1}\right|.$$

Supposons que V est dense dans $\mathscr{C}$. Alors, pour tout $m\in\mathbb{R}^+$, on a $\Delta_N(m)$ tend vers 0, *i.e* $\sum_n u_n$ diverge, avec $u_n=\log\left(\frac{\alpha_n-m}{\alpha_n+m+1}\right)$. Soit $m\in\mathbb{R}^+$.

Deux cas se présentent :
- Si $(\alpha_n)_n$ est majorée, $\sum\frac{1}{\alpha_n}$ diverge.
- Sinon, il existe un rang N_0 pour lequel $\alpha_n>m$ pour tout $n\geqslant N_0$. Alors

$$u_n\sim-\frac{2m+1}{\alpha_n}, \tag{$\star$}$$

  et comme $\sum_n u_n$ diverge, $\sum\frac{1}{\alpha_n}$ diverge aussi.

Réciproquement, supposons que $\sum\frac{1}{\alpha_n}$ diverge. En montrant que $x^k\in\overline{V}$ pour tout entier k, on aura le résultat par théorème d'approximation de Stone-Weierstraß. Soit donc $k\in\mathbb{N}$.

Si $\alpha_n\to\infty$, alors l'équivalent $(\star)$ suffit pour conclure.

Sinon :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{N}\frac{|\alpha_i-m|}{\alpha_i+m+1}&\leqslant\prod_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i+m}{\alpha_i+m+1}\\&=\prod_{i=1}^{N}\left(1-\frac{1}{\alpha_i+m+1}\right)\\&\leqslant\left(1-\frac{1}{\sup_i\alpha_i+m+1}\right)^n\\&\to 0\end{aligned}$$

□

Référence : Xavier Gourdon, Analyse, pp 286-287.

Remarque – Il y a deux erreurs dans le Gourdon :
- page 287, tout en haut : $\langle x^a,x^b\rangle=\frac{1}{a+b\underline{+1}}$.
- page 287, dans l'expression du déterminant, une somme a pour indice $i<j$:

$$\mathrm{Gram}\left(x^m,x^{\alpha_1},\dots,x^{\alpha_N}\right)=\frac{\left(\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2\right)\left(\prod_i(\alpha_i-m)\right)}{(2m+1)\left(\prod_{\underline{i<j}}(\alpha_i+\alpha_j+1)\right)\left(\prod_i(\alpha_i+m+1)^2\right)}$$