

# Théorème de Müntz

Kevin QUIRIN

Leçons :

– Déterminants

Prérequis :

– Distance à un sous-espace en fonction de déterminants de Gram

– Déterminants de Cauchy

– Théorème de Stone-Weierstraß

## Théorème 0.1

Soit  $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_2)$  l'espace des fonctions continues sur  $[0, 1]$ , muni de la norme de  $L^2$ . Soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante de réels positifs.

Alors on a l'équivalence :

(i)  $V := \text{Vect}((x \mapsto x^{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}})$  est dense dans  $\mathcal{C}$ .

(ii) La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\alpha_n}$  diverge.

*Démonstration.* Par souci de clarté, on notera simplement  $x^a$  la fonction  $x \mapsto x^a$ .

Pour  $m \in \mathbb{R}^+$ , on note  $\Delta_N(m)$  la distance de  $x^m$  à  $\text{Vect}(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})$ . On a donc, avec les déterminants de Gram :

$$\Delta_N(m)^2 = \frac{\text{Gram}(x^m, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})}{\text{Gram}(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})}.$$

Or, pour tous  $a$  et  $b$ , on a  $\langle x^a, x^b \rangle = \frac{1}{a+b+1}$ .

Donc :

$$\text{Gram}(x^m, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2m+1} & \frac{1}{m+\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{m+\alpha_N+1} \\ \frac{1}{m+\alpha_1+1} & \frac{1}{2\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\alpha_N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m+\alpha_N+1} & \frac{1}{\alpha_N+\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{2\alpha_N+1} \end{vmatrix}$$

On a donc, d'après le calcul du déterminant de Cauchy :

$$\text{Gram}(x^m, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}) = \frac{\left(\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2\right) \left(\prod_i (\alpha_i - m)^2\right)}{(2m+1) \left(\prod_{i < j} (\alpha_i + \alpha_j + 1)\right) \left(\prod_i (\alpha_i + m + 1)^2\right)}$$

et, de la même façon :

$$\text{Gram}(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}) = \frac{\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2}{\prod_{i < j} (\alpha_i + \alpha_j + 1)}.$$

Finalement, on a l'expression de la distance cherchée :

$$\Delta_N(m) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=1}^N \left| \frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1} \right|.$$

Supposons que  $V$  est dense dans  $\mathcal{C}$ . Alors, pour tout  $m \in \mathbb{R}^+$ , on a  $\Delta_N(m)$  tend vers 0, i.e  $\sum_n u_n$  diverge, avec  $u_n = \log \left( \frac{\alpha_n - m}{\alpha_n + m + 1} \right)$ . Soit  $m \in \mathbb{R}^+$ .

Deux cas se présentent :

- Si  $(\alpha_n)_n$  est majorée,  $\sum \frac{1}{\alpha_n}$  diverge.
- Sinon, il existe un rang  $N_0$  pour lequel  $\alpha_n > m$  pour tout  $n \geq N_0$ . Alors

$$u_n \sim -\frac{2m+1}{\alpha_n}, \quad (\star)$$

et comme  $\sum_n u_n$  diverge,  $\sum \frac{1}{\alpha_n}$  diverge aussi.

Réciproquement, supposons que  $\sum \frac{1}{\alpha_n}$  diverge. En montrant que  $x^k \in \bar{V}$  pour tout entier  $k$ , on aura le résultat par théorème d'approximation de Stone-Weierstraß. Soit donc  $k \in \mathbb{N}$ .

Si  $\alpha_n \rightarrow \infty$ , alors l'équivalent  $(\star)$  suffit pour conclure.

Sinon :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N \frac{|\alpha_i - m|}{\alpha_i + m + 1} &\leq \prod_{i=1}^N \frac{\alpha_i + m}{\alpha_i + m + 1} \\ &= \prod_{i=1}^N \left( 1 - \frac{1}{\alpha_i + m + 1} \right) \\ &\leq \left( 1 - \frac{1}{\sup_i \alpha_i + m + 1} \right)^n \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Référence : Xavier Gourdon, Analyse, pp 286-287.

REMARQUE – Il y a trois erreurs dans le Gourdon :

– page 287, tout en haut :  $\langle x^a, x^b \rangle = \frac{1}{a+b+1}$ .

– page 287, dans l'expression du déterminant, une somme a pour indice  $i < j$ , et il manque un carré :

$$\text{Gram}(x^m, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}) = \frac{\left( \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \right) \left( \prod_i (\alpha_i - m) \right)^2}{(2m+1) \left( \prod_{i < j} (\alpha_i + \alpha_j + 1) \right) \left( \prod_i (\alpha_i + m + 1)^2 \right)}$$