Langage de pile d'un automate à pile

Théorème 1
On considère un automate à pile $\mathscr{A} = (\Sigma, \Gamma, Q, \delta, \gamma_0, F)$.

Soit $H = \{\gamma \in \Gamma^* \mid \exists f \in \Sigma^*,\ \exists q \in Q,\ (q_0, \gamma_0) \xrightarrow{f} (q, \gamma)\}$ *le langage de pile de* $\mathscr{A}$.

Alors H *est rationnel.*

Démonstration. On pose $A_n = \{a_1, \ldots, a_n, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}\}$ et on définit une relation $\to$ sur A_n^* par :

$$w \to w' \Leftrightarrow \exists i,\ \exists u, v \in A_n^*,\ w = ua_i\overline{a_i}v \text{ et } w' = uv.$$

On remarque que la relation $\to$ est noetherienne (il n'y a pas de chaîne infinie, car la longueur des mots est strictement décroissante), et confluente (si $x \to^* y$ et $x \to^* y'$, alors il existe z tel que $y \to^* z$ et $y' \to^* z$).

Donc pour tout w, il existe un unique mot $\rho(w)$ minimal pour $\to$.

On a alors le lemme :

Lemme 2

$$\{w \mid \rho(w) = \varepsilon\} = D_n^*.$$

Démonstration. "$\subseteq$" : Soit w tel que $\rho(w) = \varepsilon$, et soit k tel que $w \to^k \varepsilon$.
Si $k = 0$, alors $w = \varepsilon$ et donc $w \in D_n^*$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout w, $w \to^k \varepsilon \ \Rightarrow w \in D_n^*$. Soit w tel que $w \to^{k+1} \varepsilon$. Alors il existe w' de la forme uv de taille $2k$ tel que $w' \to^k \varepsilon$, et tel que $w = ua_i\overline{a_i}v$. Alors $w \in D_n^*$.
"$\supseteq$" : Évident par définition de $\to$ (une récurrence sur la longueur convaincra les sceptiques).

$\Diamond$

On définit maintenant la substitution σ sur A_n^* par $\sigma(a) = D_n^* a D_n^*$.

On a alors le lemme :

Lemme 3
Pour tout $w \in A_n^*$,

$$\sigma(w) = \{w' \mid w' \to^* w\}.$$

Démonstration. "$\subseteq$" : Soit $w = w_1 \ldots w_k$. Alors $\sigma(w) = D_n^* w_1 D_n^* \ldots D_n^* w_k D_n *$.
Soit $w' \in \sigma(w)$. Alors, par le lemme précédent, $w' \to^* w$.
"$\supseteq$" : Par récurrence sur la longueur de la réduction $w' \to^p w$:
Le cas $p = 0$ est trivial.

Soit p tel que tout mot w' vérifiant $w' \to^p w$ soit dans $\sigma(w)$. Soit w' tel que $w' \to^{p+1} w$.
Alors il existe $\hat{w}$ vérifiant
- $w' \to \hat{w}$
- $\hat{w} \to^p w$
- $\hat{w} = uv$
- $w' = ua_i\overline{a_i}v$

Par hypothèse de récurrence, $\hat{w}$ est de la forme $d_1w_1 \dots d_kw_kd_{k+1}$, avec les d_i dans D_n^*.
Alors u est de la forme $d_1w_1 \dots d_j$ (resp. $d_1w_1 \dots d_jw_j$) et v de la forme $w_j \dots w_kd_{k+1}$ (resp. $d_{j+1} \dots w_kd_{k+1}$).
w' est donc de la forme
$d_1w_1 \dots d_ja_i\overline{a_i}w_j \dots w_kd_{k+1}$ (resp. $d_1w_1 \dots d_jw_ja_i\overline{a_i}d_{j+1} \dots w_kd_{k+1}$), ce qui conclut la récurrence car $d_ja_i\overline{a_i}$ (resp. $a_i\overline{a_i}d_{j+1}$) est dans D_n^*.

$\Diamond$

Lemme 4
Pour tout rationnel K sur A_n^*, le langage $\rho(K) = \{\rho(w) \mid w \in K\}$ est rationnel.

Démonstration. Un mot w est dans $\rho(K)$ si et seulement si il est irréductible pour $\to$, et si il existe $w' \in K$, tel que $w' \to^* w$.

Donc
$$\rho(K) = \sigma^{-1}(K) \setminus \left(\sum_{i=1}^{n} A_n^* a_i\overline{a_i}A_n^*\right).$$

Par stabilité des langages rationnels, $\rho(K)$ est rationnel. $\Diamond$

On va maintenant montrer que le miroir $\tilde{H}$ de H est rationnel, ce qui impliquera que H est rationnel.

On suppose que dans l'automate $\mathscr{A}$, l'alphabet de pile est $\Gamma = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Pour une transition $\tau = q, \gamma \xrightarrow{y} q', h$ dans $\mathscr{A}$, on définit $\mu(\tau) = \overline{\gamma}\tilde{h}$, que l'on étend à δ^*.

On dit que deux transitions τ et τ' sont *consécutives* si l'état d'arrivée de τ est le même que l'état de départ de τ'.

On appelle K l'ensemble des suites de transitions de $\mathscr{A}$ consécutives.

K est clairement rationnel, car reconnu par l'automate $\mathscr{A}$ auquel on enlève la pile.

On a alors
$$\tilde{H} = \rho(\gamma_0\mu(K)) \cap \Gamma^*.$$

Par le lemme précédent, et stabilité des langages rationnels, $\tilde{H}$ est rationnel.

$\square$