Ellipsoïde de John-Lœwner

Théorème 1 : de John-Lœwner
Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en O de volume minimal contenant K.

Démonstration. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle. Un ellipsoïde plein centré en O a une équation du type $q(x) \leqslant 1$ où $q \in Q^{++}$ ($i.e$ l'ensemble des formes quadratiques définies positives).

On note $\mathscr{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leqslant 1\}$ l'ellipsoide associé à $q \in Q^{++}$.

Lemme 2
Le volume de $\mathscr{E}_q$ est

$$V_q = \frac{V_0}{\sqrt{\det(q)}},$$

où V_0 est le volume de la boule unité pour la norme euclidienne canonique.

Démonstration. Dans une certaine base orthogonale, q est de la forme

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2.$$

q est définie positive, donc tous les a_i sont strictement positifs.

On a donc

$$V_q = \int_{\sum a_i x_i^2 \leqslant 1} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

On effectue le changement de variables $t_i = \sqrt{a_i} x_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. C'est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de jacobien $\frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}}$, et on obtient donc

$$V_q = \int_{\sum t_i^2 \leqslant 1} \frac{\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n}{\sqrt{a_1 \dots a_n}}.$$

De plus, le déterminant de q est indépendant de la base choisie, et vaut $a_1 \dots a_n$. ◊

Par le lemme précédent, le problème consiste maintenant à montrer qu'il existe une unique forme quadratique définie positive $q \in Q^{++}$ telle que $D(q)$ soit maximal, et telle que $\forall x \in K,\ q(x) \leqslant 1$.

On munit l'ensemble des formes quadratiques Q de la norme

$$N(q) = \sup_{||x|| \leqslant 1} |q(x)|.$$

On pose $\mathscr{A} = \{q \in Q^+ \mid \forall x \in K, q(x) \leqslant 1\}$. On remarque que si $q \in \mathscr{A}$ est définie positive, alors $K \subset \mathscr{E}_q$. On va donc chercher à maximiser $D(q)$ sur ce domaine.

Lemme 3
$\mathscr{A}$ est un compact non vide de Q.

Démonstration. $\mathscr{A}$ est non vide : K est compact, donc il est borné : soit M tel que $\forall x \in K,\ ||x|| \leqslant M$.
En posant $q_1(x) = \frac{||x||^2}{M^2}$, on a $q_1 \in Q^{++} \subset Q^+$, et pour tout x de K, $q_1(x) \leqslant 1$.
Donc $q_1 \in \mathscr{A}$, et donc $\mathscr{A}$ est non vide.
$\mathscr{A}$ est fermé : On remarque que la convergence dans Q implique la convergence faible ; en effet, si q_n converge dans Q vers q, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |q_n(x) - q(x)| \leqslant N(q_n - q)||x||^2.$$

Par suite : $q(x) = \lim q_n(x) \geqslant 0$ et $q(x) = \lim q_n(x) \leqslant 1$.
Donc $q \in \mathscr{A}$.
$\mathscr{A}$ est borné : K est d'intérieur non vide, donc K contient une boule centrée en a de rayon r.
Soit $q \in \mathscr{A}$. Si $||x|| \leqslant r$, alors $a + x \in K$, et donc $q(a + x) \leqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\sqrt{q(x)} &= \sqrt{q(x+a-a)} \\
&\leqslant \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \qquad \text{par Minkowski} \\
&\leqslant 1 + 1 \\
&\leqslant 2
\end{aligned}$$

Donc $q(x) \leqslant 4$.
Si $||x|| \leqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
|q(x)| &= q(x) \\
&= \frac{1}{r^2} q(rx) \\
&\leqslant \frac{4}{r^2}
\end{aligned}$$

Donc $N(q) \leqslant \frac{4}{r^2}$, et donc $\mathscr{A}$ est borné.

$\Diamond$

Ainsi, $\det : \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ q & \longmapsto & \det(q) \end{array}$ est continue, et donc elle est majorée, et atteint son maximum sur $\mathscr{A}$, en q_0.

On a vu que $q_1 \in \mathscr{A}$, et $q_1 \in Q^{++}$, donc $\det(q_0) \geqslant \det(q_1) > 0$.

Donc $q_0 \in Q^{++}$.

Il reste maintenant à montrer l'unicité.

Lemme 4
$\mathscr{A}$ est convexe.

Démonstration. Si q et q' sont dans $\mathscr{A}$, et $\lambda \in [0, 1]$:
– $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\lambda q + (1 - \lambda q')(x) = \lambda q(x) + (1 - \lambda)q'(x) \geqslant 0$.
– $\forall x \in K,\ \lambda q + (1 - \lambda)q')(x) \leqslant \lambda + 1 - \lambda \leqslant 1$.

$\Diamond$

Supposons qu'il existe $q \in \mathscr{A}$ tel que $D(q) = D(q_0)$ et $q \neq q_0$.

Notons S et S_0 les matrices de q et q_0 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Par convexité de $\mathscr{A}$, $\frac{1}{2}(q+q_0) \in \mathscr{A}$, et on a :

$$\begin{aligned}
\det(\frac{1}{2}(q+q_0) &= \det(\frac{1}{2}(S+S_0) \\
&> (\det S)^{1/2}(\det S)^{1/2} \qquad \text{par lemme 5} \\
&\geqslant \det S_0 \\
&\geqslant \det q_0
\end{aligned}$$

ce qui contredit la maximalité de $\det q_0$.

Lemme 5
Soient A et B dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in R^+$ tels que $\alpha+\beta=1$. Alors

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta.$$

De plus, si $A \neq B$, alors l'inégalité est stricte.

Démonstration. Par théorème de pseudo-réduction simultanée, il existe une matrice P inversible et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.

Donc

$$(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = \det P^2 (\det D)^\beta \text{ et}$$
$$\det(\alpha A + \beta B) = \det P^2 \det(\alpha I_n + \beta D).$$

On veut montrer que $\det(\alpha I_n + \beta D) \geqslant (\det D)^\beta$, ce qui équivaut à $\displaystyle\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta\lambda_i) \geqslant \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^\beta$, ou encore à $\displaystyle\sum_{i=1}^n \log(\alpha+\beta\lambda_i) \geqslant \beta \sum_{i=1}^n \log\lambda_i$.

Or pour tout i de 1 à n :

$$\begin{aligned}
\log(\alpha+\beta\lambda_i) &\geqslant \alpha\log(1) + \beta\log(\lambda_i) \qquad \text{par concavité du log} \\
&\geqslant \beta\log(\lambda_i)
\end{aligned}$$

On a le résultat en sommant sur i.

Si $A \neq B$, un des λ_i est différent de 1.

Donc, si $\alpha \in (0,1)$, la stricte concavité de log donne une inégalité stricte.

$\Diamond$

$\square$