Simplicité de A_n

3 novembre 2011

Simplicité de A_5

Les éléments d'ordre 3 (respectivement d'ordre 5) (qui sont les 3 et 5-cycles) sont respectivement tous conjugués dans $\mathcal{A}_5$ car ils forment des p-Sylow et que les p-Sylow sont tous conjugués. Les éléments d'ordre 2 sont conjugués dans A_5 car ce sont des doubles transpositions et que si on prend $s_1 = (a,b)(c,d)(e)$ et $s_2 = (a',b')(c',d')(e')$ deux d'entre elles, et soit σ une permutation qui envoie a sur a', b sur b' et e sur e'. On peut alors envoyer $\{c,d\}$ sur $\{c',d'\}$ de sorte que $\sigma \in A_5$, et $\sigma s_1 \sigma^{-1} = s_2$. Ceci indique qu'un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_5$ qui contient un élément d'ordre p les contient tous.

A_5 possède :
- $(5-1)! = 24$ 5-cycles (ses éléments d'ordre 5)
- $2\binom{5}{3} = 20$ 3-cycles (ses éléments d'ordre 3) (pensez que les coefficients binomiaux ne prennent pas compte de l'ordre)
- $\frac{1}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 15$ éléments d'ordre 2. (pensez que lorsque l'on choisi 2 parmi 5 puis 2 parmi 3 on peut tomber sur des doublons)

Soit $H \triangleleft \mathcal{A}_5$ non trivial, son cardinal divise 60, donc nécessairement il doit comporter, en plus du neutre, un type d'élément. Comme ni 25 ni 16 ni 21 ne divise 60 il contient au moins deux types d'élément et son cardinal est donc supérieur à 36 autrement dit c'est $\mathcal{A}_5$ tout entier, qui se révèle donc simple.

$n \geq 5$ quelconque

On va se ramener au cas $n = 5$ par une permutation du sous-groupe n'agissant que sur 5 éléments.

Soient $H \triangleleft A_n$, $\sigma \in H \setminus \{e\}$ et soit $a \in [|1,n|]$ tel que $b = \sigma(a) \neq a$, enfin soit $c \notin \{a, b, \sigma(b)\}$ et $\tau = (acb)$. On a

$$\begin{aligned}
\rho &= (\tau\sigma\tau^{-1})\sigma^{-1} \in H \\
&= \tau(\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}) \\
&= (acb)(\sigma(abc)\sigma^{-1} \\
&= (acb)\left(\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\{a, b, \sigma(b), c, \sigma(c)\} = Supp(\rho)$ donc $|supp(\rho)| \leq 5$, et $\rho(b) \neq b$ donc $\rho \neq e$. Considérons le morphisme i d'injection de A_5 dans A_n qui envoit s sur la permutation de A_n agissant sur $supp(\rho)$

comme s et étant l'identité sur son complémentaire. La pré-image de H par i est distinguée dans A_5 et non réduit à $\{e\}$ donc égal à A_5. Elle contient en particulier un 3-cycle, donc H contient un 3-cycle et les contient tous puisque ceux-ci sont conjugués dans A_n. Or A_n est engendré par les 3-cycles, et finalement $H = A_n$.

Référence :

Chambert-Loir, "Algèbre Corporelle" (ou : "a field guide to algebra") p.104
(mais c'est aussi dans le Delcourt, et un peu partout en fait).