Théorème de Wedderburn

Arnaud Girand

11 décembre 2011

Référence :
- [Per96], p. 82

Leçons :
- 101 - Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 104 - Groupes finis. Exemples et applications.
- 112 - Corps finis. Applications.
- 113 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
- 118 - Exemples d'utilisation de la notion de dimension d'un espace vectoriel.

Prérequis :
- polynômes cyclotomiques ;
- formule des classes.

Proposition 1 (Wedderburn)
Tout anneau à division fini est un corps.

Démonstration : Soit $\mathbb{K}$ un anneau à division fini. Considérons son centre $Z := \{a \in \mathbb{K} \,|\, \forall x \in \mathbb{K},\, ax = xa\}$. Alors Z est un corps contenu dans $\mathbb{K}$, de cardinal $q \geq 2$ (car $0, 1 \in Z$). De fait, on peut munir $\mathbb{K}$ d'une structure de Z–espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, qui nous donne l'égalité $|\mathbb{K}| = q^n$.

Supposons à présent $\mathbb{K}$ non commutatif, i.e $n > 1$. Remarquons que le groupe $\mathbb{K}^*$ agit sur lui–même par conjugaison. Si $x \in \mathbb{K}^*$, on note $\omega(w)(x)$ son orbite sous cette action, $\mathbb{K}_x := \{y \in \mathbb{K} \,|\, yx = xy\}$ et $\mathbb{K}_x^* := \{y \in \mathbb{K}^* \,|\, yx = xy\}$ son stabilisateur. $\mathbb{K}_x$ est un sous–anneau de $\mathbb{K}$ contenant Z et peut donc être vu comme un Z–espace vectoriel de dimension finie $d \geq 1$ avec de facto l'égalité $|\mathbb{K}_x| = q^d$.

Comme $\mathbb{K}_x^*$ est un sous–groupe de $\mathbb{K}^*$, alors par théorème de Lagrange $q^d - 1 | q^n - 1$ et donc comme $q \geq 2$, $d|n$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{K}^* x$, on a :

$$|\omega(x)| = \frac{|\mathbb{K}^*|}{|\mathbb{K}_x^*|} = \frac{q^n -}{1} q^d - 1 = \frac{\prod_{m|n} \phi_m(q)}{\prod_{m|d} \phi_m(q)} = \prod_{m|n,\, m\nmid d} \phi_m(q)$$

Où ϕ_m dénote le m–ième polynôme cyclotomique sur $\mathbb{C}$. Alors, dans le cas où $d \neq n$ (possible car $n > 1$), on a :

$$\phi_n(q) \,|\, \frac{q^n - 1}{q^d - 1} \tag{1}$$

La formule des classes s'écrit alors :

$$|\mathbb{K}^*| = |Z^*| + \sum |\omega(x)| \tag{2}$$

Où la somme compte chaque orbite une fois. On a donc :

$$q^n - 1 = q - 1 + \sum \frac{q^n - 1}{q^d - 1}$$

Où la somme décrit un sous ensemble des diviseurs stricts de n associé aux orbites par le procédé précédent. Comme $\phi_n(q)$ divise $q^n - 1$ et par la relation (1), on a :

$$\phi_n(q) \,|\, q - 1$$

De fait, $|\phi_n(q)| \leq q - 1$. Mais si on note $\xi_1, \ldots, \xi_\ell$ les racines primitives n–ièmes del'unité sur $\mathbb{C}$ (les $\xi_i \neq 1$ car $n \neq 1$) alors :

$$\phi_n(q) = \prod_{i=1}^{\ell} (q - \xi_i)$$

De plus $\forall i \in [\ell]$, $|q - \xi_i| > 1$ (car les ξ_i sont sur le cercle unité et différentes de 1 : faire un dessin), d'où :

$$|\phi_n(q)| > (q-1)^\ell \geq q - 1$$

Ce qui apporte la contradiction désirée.

Détails supplémentaires :

- Il est bon de savoir démontrer le lemme suivant :

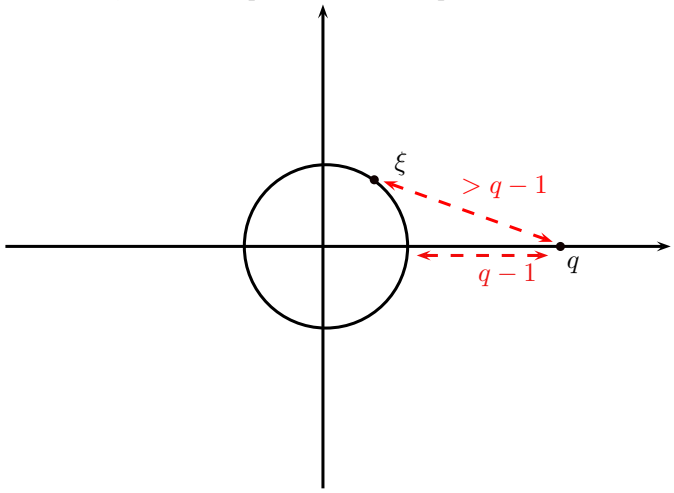
  Lemme 1
  Soit $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$.
  Soient $n, d \in \mathbb{N}$ tels que $q^d - 1 \,|\, q^n - 1$.
  Alors $d|n$.
  Démonstration : Par division euclidienne, il existe un unique couple (a, b) d'entiers naturels tels que $n = ad + b$ et $0 \leq b < d$. En remarquant que $q^d \equiv 1[q^d - 1]$, on a :

  $$q^n \equiv (q^d)^a q^b \equiv q^b[q^d - 1]$$

  Or $q^n \equiv 1[q^d - 1]$ par hypothèse d'où $q^d - 1 \,|\, q^b - 1$. Cependant, $b < d$ et $q \geq 2$ donc $q^b - 1 < q^d - 1$ donc nécessairement $b = 0$.
- On trouve l'écriture suivante de la formule (2) dans [Per96] :

  $$|\mathbb{K}^*| = |Z^*| + \sum_{x \notin Z} |\omega(x)|$$

  Cependant on "compte" alors chaque orbite plusieurs fois, d'où la nécessité de restreindre la somme à un représentant par orbite (on peut aussi sommer sur l'espace quotient $\mathbb{K}^*/\sim$, où $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in \mathbb{K}^*$, $gxg^{-1} = y$). On pourra se référer à [Art91], p. 198.
- Si ξ est une racine primitive n–ième de l'unité alors les autres sont les ξ^m, avec $m \wedge n = 1$. Ainsi dans la démonstration, $\ell = \varphi(n)$ (cf. [Per96], p.80).
- En bonus, un dessin pour mieux comprendre la fin de la démonstration :



Références

[Art91] Michael Artin. *Algebra*. Prentice-Hall, 1991.

[Per96] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.