

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Référence : L. Schwartz, Analyse 2

Dans la suite, on considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = L(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{E})$$

où L est continue de $|a, b| \times \mathbb{R}^n$, $|a, b|$ intervalle (ouvert, fermé ou semi-ouvert) de \mathbb{R} .

Théorème 1 : de Cauchy-Lipschitz

On suppose la fonction L continue et globalement k -lipschitzienne en sa seconde variable.

Alors l'équation (E) admet une unique solution f sur $|a, b|$.

Démonstration. Partons d'une fonction f_0 , et construisons une suite de fonction $(f_n)_n$ par récurrence :

$$f_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t L(\xi, f_n(\xi)) d\xi. \quad (1)$$

Lemme 2

La suite (f_n) vérifie, pour tout n :

$$\begin{cases} \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq C \frac{k^n |t-t_0|^n}{n!} \\ \text{où } C \leq \sup_{t_0 \leq \xi \leq t} \|f_1(\xi) - f_0(\xi)\| \end{cases}$$

Démonstration. Le résultat est évident pour $n = 0$.

Supposons-le vrai pour $n \geq 0$.

Alors :

$$f_{n+2} - f_{n+1} = \int_{t_0}^t (L(\xi, f_{n+1}(t)) - L(\xi, f_n(t))) d\xi,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|f_{n+2} - f_{n+1}\| &\leq \int_{t_0}^t \|L(\xi, f_{n+1}(t)) - L(\xi, f_n(t))\| d\xi \\ &\leq k \int_{t_0}^t \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \quad \text{car } L \text{ lipschitzienne} \\ &\leq \frac{C k^{n+1}}{n!} \int_{t_0}^t |\xi - t_0|^n d\xi \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\leq C \frac{k^{n+1} |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

◇

Ce lemme nous permet d'affirmer que la suite (f_n) est de Cauchy uniformément sur tout compact, et donc converge uniformément sur tout compact, vers une fonction f .

La continuité uniforme nous autorise à passer à la limite dans la définition des f_n , d'où :

$$f(t) = y_0 + \int_{t_0}^t L(\xi, f(\xi))d\xi,$$

ce qui est équivalent à (E).

On peut montrer le lemme suivant par récurrence sur n :

Lemme 3

Soient f_0 et g_0 deux fonctions, et (f_n) et (g_n) les suites définies par la relation (1) à partir des données initiales f_0 et g_0 respectivement.

Alors pour tout n :

$$\|f_n(t) - g_n(t)\| \leq C \frac{k^n |t - t_0|^n}{n!}.$$

Ce lemme nous montre que la limite f est indépendant du choix de f_0 .

Soit \hat{f} une autre solution de (E). En considérant la suite définie par $f_0 = \hat{f}$ et la relation (1), on obtient $f_n = \hat{f}$, et donc $\hat{f} = f$.

D'où l'unicité. □

EXEMPLE – Si L n'est pas lipschitzienne, on perd l'unicité : on peut par exemple prendre $L(t, y) = 3y^{2/3}$.

L n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0, et si $c_1 < 0 < c_2$, la fonction définie par

$$y(t) = \begin{cases} (t - c_1)^3 & \text{pour } t \leq c_1 \\ 0 & \text{pour } c_1 < t < c_2 \\ (t - c_2)^3 & \text{pour } c_2 \leq t \end{cases}$$

est solution de $y' = L(t, y)$ avec $y(0) = 0$.