Le théorème de Burnside

2011-2012

Définition 1
On dit qu'un groupe G est d'exposant fini si $\exists k \in \mathbb{N},\ \forall g \in G,\ g^k = e$.

Si G est d'exposant fini, on appelle exposant de G *le plus petit k qui convienne, et si G n'est pas d'exposant fini, l'exposant de G est $+\infty$.*

Historique : En 1902, Burnside se demande si un groupe de type fini d'exposant fini est nécessairement fini. Ce n'est qu'en 1975 qu'on a pu répondre par la négative, par un contre-exemple.

Théorème 2
Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

Alors G est fini si et seulement si *G est d'exposant fini.*

NOTATION – On notera $\omega(g)$ l'ordre d'un élément d'un groupe.

Démonstration. Le sens réciproque est évident, on peut considérer par exemple $k = \prod_{g\in G} \omega(g)$.

Pour le sens direct, commençons par montrer un lemme sur les matrices nilpotentes :

Lemme 3
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Tr}(A^k) = 1$. Alors A est nilpotente.

Démonstration. Supposons que A n'est pas nilpotente. Alors A possède des valeurs propres non nulles $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicités respectives $n_1, \dots, n_r$.

L'hypothèse nous donne donc (quitte à trigonaliser la matrice) :

$$\forall \in \mathbb{N}^*,\ n_1\lambda_1^k + \cdots + n_r\lambda_r^k = 0.$$

En écrivant ces relations pour $k = 1, \dots, r$, on obtient que $(n_1, \dots, n_r)$ est une solution non nulle du système

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$$

Or le déterminant de la matrice du système est non nul car les λ_i sont tous distincts par hypothèse (matrice de Vandermonde). Donc $(n_1, \dots, n_r) = 0$, ce qui est une contradiction. $\Diamond$

Soit $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une base de Vect(G), où tous les M_i sont dans le groupe G.

Introduisons la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ A & \longmapsto & (\mathrm{Tr}(AM_i))_{1\leqslant i\leqslant m} \end{array}.$$

Lemme 4
Si $f(A) = f(B)$, alors $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente.

De plus, f est injective.

Démonstration. Comme (M_i) est une base, et que Tr est linéaire, on a $\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM)$ pour tout M dans Vect(G), et en particulier pour tout M dans G.

Soit $D = AB^{-1} \in G$. Alors pour tout $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(D^k) &= \mathrm{Tr}\left(AB^{-1}D^{k-1}\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left(BB^{-1}D^{k-1}\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left(D^{k-1}\right)\end{aligned}$$

Une récurrence immédiate nous donne donc $\mathrm{Tr}\left(D^k\right) = \mathrm{Tr}\left(I_n\right) = n$, et donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left((D - I_n)^k\right) &= \mathrm{Tr}\left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j D^{k-j}\right)\\ &= n\sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j\\ &= n(1-1)^k\\ &= 0\end{aligned}$$

Le lemme 3 nous permet d'affirmer que $D - I_n$ est nilpotente.

Montrons que toute matrice de G est diagonalisable. Soit $N < \infty$ l'exposant de G. Alors le polynôme $X^N - I_n$ annule toutes les matrices de G. Comme il est scindé à racines simples, les matrices de G sont diagonalisables.

La matrice D précédente est donc diagonalisable, et donc $D - I_n$ aussi. Comme elle est aussi nilpotente, elle est nulle, et donc $AB^{-1} - I_n = 0$, d'où $A = B$.

Donc f est injective. $\lozenge$

Étant donnée la définition de f, on peut affirmer que $\mathrm{Im}(f) \subseteq T^m$, où $T = \{\mathrm{Tr}(A) \mid A \in G\}$.

On a vu que toute matrice de G est annulée par $X^N - I_n$, donc les valeurs propres des matrices de G sont toutes des racines N-ième de l'unité. Donc l'ensemble des traces possibles T est fini.

f est donc une application injective de G dans un ensemble fini, et donc G est nécessairement fini.

$\square$

Référence : Oraux X-ENS, algèbre 2.

Remarque – Il y a plusieurs façon de démontrer le lemme 3 dans le bouquin. Cependant, celle qui utilise les polynômes symétriques élémentaires et formules de Newton demande de maîtriser celles-ci, et la récurrence sur la dimension est moche (comme toute récurrence sur la dimension).