229 Fonctions monotones - fonctions convexes. Exemples et Applications

I - Fonctions monotones :

a) Définitions et propriétés :

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$

Définition 1 : Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite :
- croissante si $\forall x, y \in A \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- décroissante si $\forall x, y \in A \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- monotone si f est croissante ou décroissante

Exemple 2 :
$f(x) = x^3$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \arctan(x)$ croissantes

Remarque 3 :
f croissante $\Leftrightarrow -f$ décroissante

Proposition 4 : l'ensemble des fonctions croissantes est un cône convexe

Remarque 5 : Un produit de fonctions monotone n'est pas toujours monotone ; $f : x \longmapsto x^2$

b) Fonctions monotones et continuité :

Théorème 6 : Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

① a est adhérent à $A \cap]a; +\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe et vaut $\inf\limits_{\substack{x \in A \\ x > a}} f(x)$

a est adhérent à $A \cap]-\infty; a[$, alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existe et vaut $\sup\limits_{\substack{x \in A \\ x < a}} f(x)$

② $a \in A$ et est adhérent à $A \cap]a; +\infty[$ et $A \cap]-\infty; a[$
alors $\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = f(a \pm 0)$ existe et $f(a-0) \leq f(a) \leq f(a+0)$

Corollaire 7 : Soient $a < b$; $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone alors f est réglée

L'étude d'une fonction monotone sur $A \subset \mathbb{R}$ se ramène facilement à l'étude d'un de ces prolongements sur l'enveloppe convexe de A. Dans la suite, nous nous contenterons d'étudier f sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

Proposition 8 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone, alors l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Théorème 9 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, on a équivalence entre :
(i) f est injective
(ii) f est strictement croissante

Proposition 10 : Deux intervalles sont homéomorphes ssi ils sont de même nature.

Exemple 11 : $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\simeq]-\infty; +\infty[$ par l'homéomorphisme tan

Remarque 12 : Il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas monotones, sur chaque intervalle non vide.

c) Fonctions monotones et dérivabilité :

Proposition 13 : $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I alors $f' \geq 0$ implique f croissante.

Exemple 14 : $f : x \longmapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Théorème 15 : (admis) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone alors f est dérivable presque partout

d) Suites de fonctions monotones :

Proposition 16 : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n$ est une fonction croissante.

Exemple 17 : $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ sur $[0; +\infty[$, $\lim\limits_{\to +\infty} f_n(x) = e^x$

Théorème 18 : (2nd th. de Dini)
Soit $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante qui converge simplement vers une fonction continue f. Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Contre ex : $f_n(x) = x^n$ sur $[0; 1]$

II - Fonctions convexes : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Définition 19 : Un ensemble C est convexe si

$$\forall x,y \in C,\ \forall \lambda \in [0;1] \qquad (1-\lambda)x + \lambda y \in C$$

Définition 20 :
Soit C un convexe de E, $f : C \to \mathbb{R}$ est dite convexe si $\forall x,$
$\forall x,y \in C\ \forall t \in [0;1]\quad f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$

1- Fonctions convexes d'une variable réelle

a) Premières propriétés

Exemples 21 : $f : x \mapsto |x|$, $f : x \mapsto x^2$, $f : x \mapsto 3x+1$ sont convexes

Formulaire 22 : $g, f : I \to \mathbb{R}$ convexes, alors $f+g$, $\sup(f,g)$ et λf convexes $\lambda \geq 0$

Remarques 23 :
- Un produit de fonctions convexe n'est pas toujours convexe
  $f \equiv x$; $g \equiv x^2$ convexes sur $\mathbb{R}$ et $fg \equiv x^3$ non convexe sur $\mathbb{R}$
- f concave si $-f$ convexe ; ex : $\ln$ est concave

Définition 24 : $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ est log-convexe si $\log(f)$ convexe

Remarque 25 : l'ensemble des fonctions log-convexes est stable pour $+$, $\times$ et par limite.

Proposition 26 : log-convexe $\Rightarrow$ convexe

Application 27 : Γ est l'unique fonction log-convexe qui vaut 1 en 1 et telle que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Définition 28 : $f : I \to \mathbb{R}$ est mid-convexe si $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$

Théorème 29 : f mid-convexe + continue $\Rightarrow$ f convexe

Proposition 30 : f est convexe
ssi $\Gamma_f^+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in I\ ;\ y \geq f(x)\}$ est convexe

Théorème 31 : (Jensen)
$f : I \to \mathbb{R}$, on a équivalence entre :
(i) f est convexe
(ii) $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tq $\sum_i \lambda_i = 1$ et $\forall x_1, \dots, x_n \in I$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

b) Fonctions convexes et régularité

Proposition 32 : Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x \in I$, on note

$$\phi_x : I \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$$

f convexe $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I$ ϕ_x est croissante

Corollaire 33 : $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, alors
f est dérivable à droite et à gauche sur I et $\forall x,y \in I$

$$f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$$

Corollaire 34 : $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et I ouvert, Alors
f est continue sur I et $f'_g(x) = f'_d(x)$, $\forall x \in I$ sauf sur un ensemble au plus dénombrable

Théorème 35 : $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable
(f est convexe) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in I$ $f''(x) \geq 0$)

Remarque 36 : Si f est convexe, la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Application 37 : Soient $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, concave et γ un chemin dans $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ situé au-dessus du graphe de f et joignant ces extrémités, Alors

$$l(\gamma) \geq l(\Gamma_f) \quad \text{où } l(\cdot) \text{ donne la longueur des chemins}$$

2- Fonctions convexes dans $\mathbb{R}^n$

Théorème 38 : Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $J : \Omega \to \mathbb{R}$, U convexe de Ω
On a J dérivable en $u \in U$ et u minimum relatif sur U $\Rightarrow \forall v \in U \quad J'(u)(v-u) \geq 0$

Théorème 39 : J dérivable
J convexe $\Leftrightarrow \forall u, v \in U \quad J(v) \geq J(u) + J'(u)(v-u)$
J strictement convexe $\Leftrightarrow \forall u, v \in U,\ u \neq v,\ J(v) > J(u) + J'(u)(v-u)$

Théorème 40 : J deux fois dérivable
J convexe sur $U \Leftrightarrow \forall u, v \in U \quad J''(u)(v-u, v-u) \geq 0$
J strictement convexe sur $U \Leftarrow \forall u, v \in U,\ u \neq v,\ J''(u)(v-u ; v-u) > 0$

Contre ex 41 : $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^4$

Théorème 42 :
(1) $u \in U$ minimum relatif de J convexe sur $U \Rightarrow u$ minimum global
(2) J strictement convexe $\Rightarrow J$ admet au plus un minimum et il est strict.
(3) J der. en $u \in U$, convexe. u minimum $\Leftrightarrow \forall v \in U \quad J'(u)(v-u) \geq 0$
(4) Si U est ouvert on retrouve la condition $J'(u) = 0$

III - Applications

1- Inégalités de convexité :

Inégalité arithmético-géométrique : 43
$\forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}_+$ tq $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$

$$\frac{x_1 + \dots + x_m}{m} \geq (x_1 \cdots x_m)^{1/m}$$

Hölder[44] : Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors
$\forall a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m > 0$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^q\right)^{1/q}$$

Minkowski[45] : Soit $\alpha \geq 1$, alors $\forall a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \geq 0$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} (a_i + b_i)^\alpha\right)^{1/\alpha} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^\alpha\right)^{1/\alpha} + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

Remarque[46] : On peut considérer $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto (1 + t^p)^{1/p}$ avec $p \in]0;1[$ pour montrer Minkowski

2- Optimisation dans un espace de Hilbert :

Théorème[47] : (Riesz) Soit H un espace de Hilbert et $f \in H'$ un élément du dual. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que :

$$\forall v \in H \quad f(v) = \langle u, v \rangle$$

Théorème 48 : (projection)
Soit U un sous-ensemble convexe, fermé d'un espace de Hilbert H. Soit $u \in H$, alors il existe un unique élément $P(u)$ telle que :

(i) $P(u) \in U$ et $\|u - P(u)\| = \inf_{v \in U} \|u - v\|$

(ii) $\forall v \in U \quad \langle P(u) - u, v - P(u) \rangle \geq 0$

Théorème 49 :
Soit U une partie convexe, fermée, d'un espace de Hilbert séparable H et $J : H \to \mathbb{R}$ convexe, dérivable, coercive (si U est non borné).

Alors : il existe au moins un $u \in U$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v)$$

Dev 2

Annexe

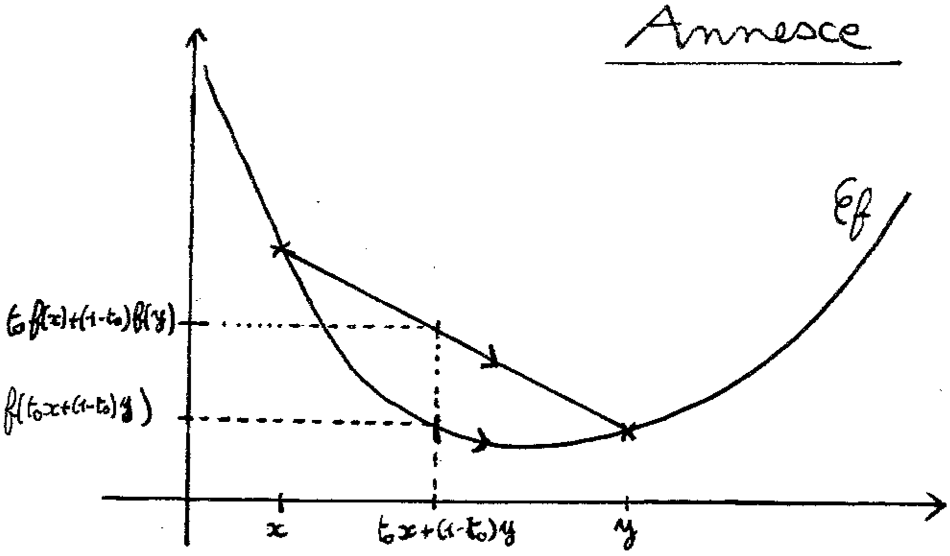
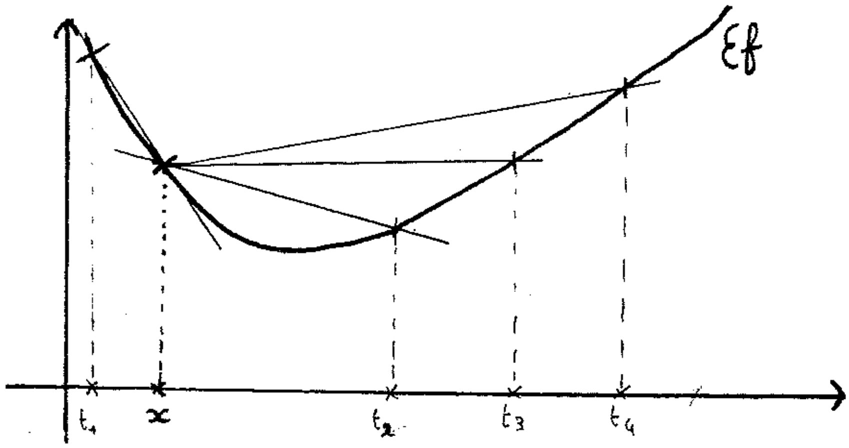


Illustration de la définition d'une fonction convexe (Def 20)



$\phi_x(t_1) \leq \phi_x(t_2) \leq \phi_x(t_3) \leq \phi_x(t_4)$

Illustration de la proposition 32

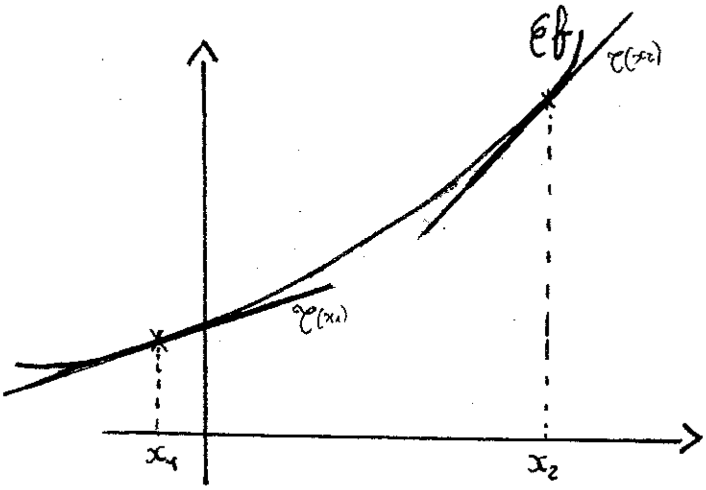


Illustration de la remarque 36

Références :

- Arnaudiès et Fraysse : " Cours de mathématiques - 2 ; Analyse "
  - → fcts monotones p. 144
  - → fcts convexes (1 variable réelle) p. 228
  - → inégalités p. 239
- Ciarlet : " introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation "
  - → fcts convexes dans $\mathbb{R}^n$
  - → Dev 2, p 176-177
- FGN, Oraux X-ENS, Analyse 4 → Dev 1

veloppement 1 : chemin au dessus d'une courbe concave.

Définition : Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ une subdivision adaptée. On définit la longueur de ce chemin de la façon suivante

$$\ell(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Notation : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \text{ pour } x \in \mathbb{R}\}$ le graphe de f.

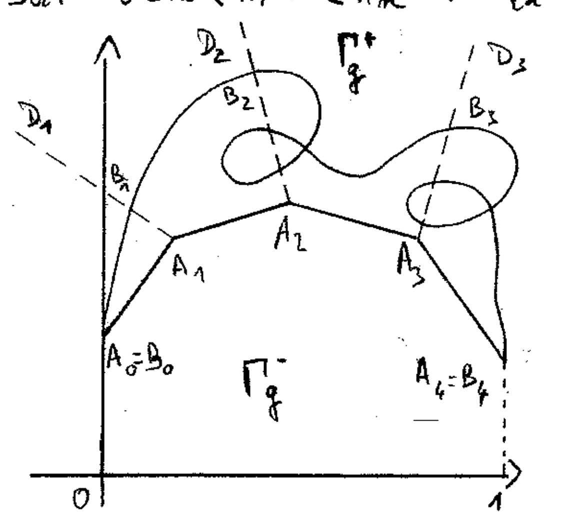
Énoncé : Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, concave et γ un chemin dans $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ situé au dessus du graphe de f et joignant ces extrémités.

Alors, $\ell(\gamma) \geq \ell(\Gamma_f)$.

Démonstration.

• **Etape 1** : cas d'une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ concave et affine par morceaux.

Soit $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$ la subdivision minimale telle que $g_{|[x_i, x_{i+1}]}$ soit affine.



On note :

- $\forall i \in [\![0,n]\!]$, A_i le point $(x_i, g(x_i))$
- $\Gamma_g^+ = \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} \mid y \geq g(x)\}$

  $\Gamma_g^- = \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} \mid y \leq g(x)\}$

Γ_g^- est convexe car g est concave.

Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on considère D_i la demi-droite issue de A_i, perpendiculaire à $(A_{i-1} A_i)$, incluse dans Γ_g^+ telle que $(A_{i-1} A_i) \cap \Gamma_g^- = A_i$.

Or g est concave ainsi les D_i ne s'intersectent pas et partitionnent Γ_g^+ en n composantes connexes. Par continuité de γ, il existe une suite finie $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ telle que :

- $\forall i \in [\![1, n]\!]$: $\gamma(t_i) \in D_i$. (par connexité)
- $\forall i \in [\![1, n]\!]$: $\forall t < t_i$ $\gamma(t) \notin D_i$.

Posons, pour $i \in [\![0, n]\!]$; $B_i = \gamma(t_i)$.

De plus, A_i est le projeté de B_i sur Γ_g. Or la projection sur un convexe fermé est 1-lipschitzienne, on en déduit :

$$A_i A_{i+1} \leq B_i B_{i+1}$$

la droite est le plus court chemin.

Finalement ; $$\ell(\Gamma_g) = \sum_{i=0}^{m-1} A_i A_{i+1} \leq \sum_{i=0}^{m-1} B_i B_{i+1} \leq \ell(\gamma)$$

Etape 2 : Retour au cas général.

Soit $S = (x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 1)$ une subdivision de $[0,1]$.

Posons $g_S : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- $\forall i \in [\![0,n]\!]$: $g_S(x_i) = f(x_i)$.
- $\forall i \in [\![0,n-1]\!]$: $g_{S|[x_i, x_{i+1}]}$ est affine.

Par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et concave donc f' est décroissante. D'après l'inégalité des accroissements finis : (pour $1 \leq i \leq n-1$).

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \geqslant f'(x_i) \geqslant \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Ainsi, g_S' est croissante i.e. g_S est concave.

Le chemin le plus court entre deux points de $\mathbb{R}^2$ est le segment, d'où :

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!] \qquad \ell\left(\Gamma_{g_{S|[x_i,x_{i+1}]}}\right) \leq \ell\left(\Gamma_{f|[x_i,x_{i+1}]}\right)$$

Finalement : $\ell(\Gamma_{g_S}) \leq \ell(\Gamma_f)$.

Il reste à montrer que $\ell(\Gamma_f) = \sup\{\ell(\Gamma_{g_S})\ ;\ S \text{ subdivision de } [0,1]\}$.

D'après le théorème de Heine, f' est uniformément continue sur $[0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ uniforme. Soit $N \geqslant \frac{2}{\eta}$ ($N \in \mathbb{N}$) posons $S = \{\frac{i}{N}\ ;\ i \in [\![0, N]\!]\}$.

Montrons que g_S convient.

- $\forall x \in [0,1] \setminus S \quad |g_S'(x) - f'(x)| < \varepsilon$, en effet : $\exists i \in [\![0, N-1]\!]$ tq $x \in]x_i, x_{i+1}[$

$$|g_S'(x) - f'(x)| = \left|\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - f'(x)\right| \overset{(*)}{=} |f'(y) - f'(x)| \leqslant \varepsilon$$

$\hookrightarrow |x-y| < \eta$

(*) Th. accroissements finis, $\exists y \in]x_i, x_{i+1}[$ tq $\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(y)$.

- Enfin, pour $i \in [\![0, N-1]\!]$

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1+(g_S'(x))^2}\,dx\right| \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|\sqrt{1+f'(x)^2} - \sqrt{1+g_S'(x)^2}\right| \overset{(**)}{\leqslant} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x) - g_S'(x)|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{N}$$

(**) $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ est 1-lipschitzienne.

Puis en sommant : $|\ell(\Gamma_f) - \ell(\Gamma_{g_S})| \leq \varepsilon$.

$\blacksquare$

Ref : FGN, Oraux X-ENS, Analyse 4.

Développement 2 : optimisation dans un espace de Hilbert.

Théorème : Soit H un espace de Hilbert et $J : H \to \mathbb{R}$ convexe, continue et coercive.
Alors, il existe $\alpha \in H$ tel que $J(\alpha) = \inf_{x \in H} J(x)$.

Démonstration. Considérons une suite minimisante $(x_n)_n$, telle que :
$$\forall n \geq 0 \quad x_n \in H \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} J(x_n) = \inf_{x \in H} J(x)$$

• *Etape 1 :* $(x_n)_n$ est bornée.

Supposons qu'elle ne le soit pas, alors il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que $\lim_{+\infty} \|x_{\varphi(n)}\| = +\infty$. Or par coercivité, $J(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$. Ce qui contredit la définition de $(x_n)_n$. Ainsi, il existe $C > 0$ tel que $\forall n \geq 0 \quad \|x_n\| \leq C$.

• *Etape 2 :* extraction d'une sous suite qui converge faiblement.

* Commençons par montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall i \in [\![0, k]\!]$ la suite $(\langle x_i, x_{\varphi_k(n)} \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Pour $k = 0$: $(\langle x_0, x_n \rangle)_n$ est une suite réelle bornée (Cauchy-Schwartz) donc il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict. croissante telle que $(\langle x_0, x_{\varphi_0(n)} \rangle)_n$ converge.

Supposons que pour $k \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\uparrow\uparrow$, $\forall i \in [\![0, k]\!]$, $(\langle x_i, x_{\varphi_k(n)} \rangle)_n$ c.v.
$(\langle x_{k+1}, x_{\varphi_k(n)} \rangle)_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$ donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\uparrow\uparrow$ telle que :
$(\langle x_{k+1}, x_{\varphi_k \circ \varphi(n)} \rangle)_n$ converge. Donc $\varphi_{k+1} = \varphi_k \circ \varphi$ convient.

* On pose $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $k \mapsto \varphi_k$ (procédé diagonal) et $y_k = x_{\psi(k)}$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ $(\langle x_k, y_n \rangle)_n$ converge.
Et par linéarité, $\forall v \in F := \mathrm{Vect}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})$, $(\langle v, y_n \rangle)_n$ converge.
De plus, H est un espace de Hilbert donc $H = \overline{F} \oplus F^{\perp}$.

* Montrons que $\forall u \in H$: $(\langle u, y_n \rangle)_n$ converge.

Soit $u \in H$ et $\varepsilon > 0$, $\exists (v, w) \in \overline{F} \times F^{\perp}$ tq $u = v + w$ et $\exists \tilde{v} \in F$ tq $\|v - \tilde{v}\| \leq \varepsilon$
Soient $k, l \geq 0$:
$$|\langle u, y_k - y_l \rangle| = |\langle v, y_k - y_l \rangle| \leq \underbrace{\|v - \tilde{v}\|}_{\leq \varepsilon} \cdot \underbrace{\|y_k - y_l\|}_{\leq 2C} + |\langle \tilde{v}, y_k - y_l \rangle|$$

$(\langle \tilde{v}, y_n \rangle)_n$ c.v., elle est donc de Cauchy ie $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall k, l \geq N : |\langle \tilde{v}, y_k - y_l \rangle| \leq \varepsilon$
Finalement : $\forall k, l \geq N$:

$$|\langle u, y_k - y_l \rangle| \leq (2c+1)\,\varepsilon .$$

ie $(\langle u, y_n \rangle)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge.

Posons $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$; $u \longmapsto \lim_{+\infty} \langle u, y_n \rangle$ qui est une forme linéaire, continue (Cauchy-Schwarz).
D'après le théorème de Riesz : $\exists ! \alpha \in H \quad \forall u \in H \quad f(u) = \langle u, \alpha \rangle$.

<u>Etape 3</u> : $J(\alpha) = \inf_{x \in H} J(x)$.

Soit $\beta > \inf_{x \in H} J(x)$, posons $C_\beta = \{x \in H \mid J(x) \leq \beta\}$.
C_β est un ensemble convexe fermé non vide car J est convexe continue.
Notons $\Pi : H \to H$ la projection sur C_β.
$\lim_{k \to +\infty} J(y_k) = \inf_{x \in H} J(x)$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \geq N \quad y_k \in C_\beta$.
ie $\quad \langle y_k - \Pi(\alpha), \alpha - \Pi(\alpha) \rangle \leq 0 \quad$ (prop. de la projection)
Par passage à la limite : $\quad \|\alpha - \Pi(\alpha)\|^2 \leq 0$.
D'où, $\quad \alpha = \Pi(\alpha) \quad$ et $\quad \alpha \in C_\beta$.

Enfin, $\forall \beta > \inf_{x \in H} J(x) \qquad J(\alpha) \leq \beta \quad$ donc $\quad J(\alpha) = \inf_{x \in H} J(x)$.

$\blacksquare$

Référence : Ciarlet, "Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation", p. 176-177.