103 Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Cadre : $(G,\cdot)$ groupe de neutre e, $H \leq G$ (un sous-groupe)
K un corps. $\tilde{G}$ un autre groupe.

I/ Notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

1) Définition de sous-groupe distingué et exemples. [CAL] [PER]

Def 1 : • H est un sous-groupe distingué de G si : $\forall g \in G,\ gH = Hg$. On notera $H \triangleleft G$.
• La relation $g \sim_H \tilde{g}$ ssi $g \in \tilde{g}H$ est une relation d'équivalence. On note G/H l'ensemble quotient. $[G:H] := |G/H|$

Ex 2 : $\{e\}$ et G sont distingués dans G.

Prop 3 : $H \triangleleft G$ ssi l'une des propriétés suivante est vérifiée :
i) $\forall g \in G,\ gHg^{-1} = H$.
ii) $\forall g \in G,\ gHg^{-1} \subset H$
iii) H est stable par $\mathrm{Int}\,G$, les automorphismes intérieurs de G.

Ex 4 : $\langle (123) \rangle \triangleleft \mathfrak{S}_3$; $\mathrm{Int}\,G \triangleleft \mathrm{Aut}\,G$.

a) Exemples liés à la commutativité.

Prop 5 : On note $Z(G)$ le centre de G. Alors, si K est un sous-groupe de G, $K \triangleleft G$.

Prop 6 : Si G abélien, alors tout sous-groupe de G est distingué.

C-Ex 7 : Tous les sous-groupes du groupe des quaternions $\mathbb{H}_8$ sont distingués, mais $\mathbb{H}_8$ n'est pas abélien.

Ex 8 : $\forall n \in \mathbb{N},\ n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$.

b) Noyaux et images de morphismes.

Prop 9 : Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,\tilde{G})$, alors $\mathrm{Ker}\,\varphi \triangleleft G$.

Ex 10 : $SL_n(K) \triangleleft GL_n(K)$

Ex 11 : Le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est distingué dans $\mathfrak{S}_n$.

Prop 12 : Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,\tilde{G})$ surjectif, alors si $H \triangleleft G$, $\varphi(H) \triangleleft \tilde{G}$.

c) Sous-groupe distingué grâce à son indice.

Thm 13 : • Si $[G:H]=2$, alors $H \triangleleft G$
• Si G est fini d'ordre n, on note p le plus petit diviseur premier de n. Alors si $[G:H]=p$, on a : $H \triangleleft G$.

App 14 : On note ρ la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ dans le groupe diédral D_n. Alors $\langle \rho \rangle \triangleleft D_n$.

2) Structure de groupe quotient.

Def-Prop 14 : Soit $H \triangleleft G$. Alors l'ensemble quotient G/H peut être muni d'une structure de groupe obtenue en posant :
$$\forall g,g' \in G,\ (gH)\cdot(g'H) = gg'H.$$

Ex 15 : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$, $(GL_n(K)/SL_n(K),\times)$

Ex 16 : Si E est un $\mathbb{R}$-espace-vectoriel et N une semi-norme sur E, alors N est une norme sur E/H, où H est le sous-groupe des éléments de norme 0.

App 17 : $L^p(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R})/H$ où $H = \{f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}),\ f = 0 \text{ p.p}\} \leq \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Prop 18 : La projection canonique $\pi : G \to G/H$ (avec $H \triangleleft G$) est un morphisme de groupes surjectif, de noyau H.

Cor 19 : $H \triangleleft G$ ssi H est le noyau d'un morphisme de groupes.

Prop 20 : π induit une bijection entre les sous-groupes (resp. distingués) de G contenant H et les sous-groupes (resp. distingués) de G/H.

App 21 : Les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $d \mid n$

Thm 22 : (Propriété universelle) Soit $H \triangleleft G$ et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,\tilde{G})$ tel que $H \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$ alors :
$$\exists!\ \bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(G/H,\tilde{G}),\ \varphi = \bar{\varphi}\circ\pi$$
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{G} \\ G/H \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

3) Théorèmes d'isomorphismes

Thm 23 : (1er Théorème d'isomorphisme)
Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,\tilde{G})$, alors $G/\mathrm{Ker}\,\varphi \simeq \mathrm{Im}\,\varphi$

Ex 24 : $\mathbb{U}_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; $\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$; $\mathfrak{S}_n/\mathcal{A}_n \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$GL_n(K)/SL_n(K) \simeq K^\times$

Thm 25. (3ème Théorème d'isomorphisme)
$(H \triangleleft G \text{ et } H \subset K \triangleleft G) \Rightarrow G/K \simeq (G/H)/(K/H)$

Ex 26 : Si $m \mid n$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

II/ Produits de groupes et groupes simples. [CAL]

1) Produit direct.

Def 27: Soient G_1, G_2 deux groupes. On peut munir $G_1 \times G_2$ d'une structure de groupe en posant :
$$\forall g_1, \tilde{g}_1 \in G_1, \forall g_2, \tilde{g}_2 \in G_2 \quad (g_1,g_2)\cdot(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2) = (g_1\tilde{g}_1, g_2\tilde{g}_2).$$

Prop 28: $G_1 \times (e_2) \triangleleft G_1 \times G_2$; $(e_1) \times G_2 \triangleleft G_1 \times G_2$.

Thm 29: Soient H_1, H_2 deux sous-groupes de G tels que :
$$\left.\begin{array}{l} 1)\ H_1 \triangleleft G,\ H_2 \triangleleft G \\ 2)\ H_1 \cap H_2 = (e) \\ 3)\ H_1 H_2 = G \end{array}\right\} \text{ alors } G \simeq H_1 \times H_2.$$

App 30: (Théorème chinois)
$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \iff n \wedge m = 1.$$

2) Produit semi-direct.

Prop-def 31: Soient N, H deux groupes, $\varphi \in \mathrm{Hom}(H, \mathrm{Aut}\,N)$. On peut munir $N \times H$ d'une structure de groupe posant :
$$(n,h)\cdot(n',h') = (n\,\varphi(h)(n'), hh')$$
On note $N \rtimes_\varphi H$ ce groupe.

Prop 32: Soit $G = N \rtimes_\varphi H$. S'équivalent :
i) $\varphi \equiv id_N$
ii) $G = N \times H$

Prop 33: Soient N, H sous-groupes de G tels que :
$$\left.\begin{array}{l} 1)\ N \triangleleft G \\ 2)\ N \cap H = (e) \\ 3)\ NH = G \end{array}\right\} \text{ alors } G \simeq N \rtimes H.$$

Ex 34:
- $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes \langle \tau \rangle$ où τ transposition de $\mathfrak{S}_n$.
- $D_n \simeq \langle \rho \rangle \rtimes \langle s \rangle$ où $s : z \mapsto \bar{z}$ symétrie.
- $GL_n(k) \simeq SL_n(k) \rtimes k^\times$

Ex 35: On note GA_n le groupe affine de dimension n et $T_n(k)$ le sous-groupe des translations affines. Alors :
$GA_n(k) \simeq T_n(k) \rtimes_0 GL_n(k)$ [H2G2]

3) Groupes simples. [PER]

Def 36: G est dit simple si ses seuls sous-groupes distingués sont (e) et G.

Ex 37: Les groupes abéliens simples sont les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier.

Prop 38: $\mathfrak{A}_n$ est simple si $n \geq 5$.

App 39: Si $n \geq 5$, les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{Id\}$, $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{S}_n$.

Def 40: On définit $PSL_n(k) := SL_n(k) / Z(SL_n(k))$

Thm 41: $PSL_n(k)$ est simple sauf si $n=2$ et $k = \mathbb{F}_2$.

Thm 42: (ADMIS) $SO_n(\mathbb{R})$ est simple si n impair.

Prop 43: Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, \tilde{G})$ avec G simple. Alors φ est soit trivial (i.e constant égal à $e_{\tilde{G}}$) ou injectif.

III/ Sous-groupes distingués remarquables.

1) Sous-groupes caractéristiques. [CAL]

Def 44: H est dit caractéristique dans G si :
$\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\varphi(H) = H$. On note $H \sqsubset G$.

Prop 45: $H \sqsubset G \implies H \triangleleft G$.

Ex 46: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \sqsubset \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$; $\mathrm{Int}\,G \sqsubset \mathrm{Aut}\,G$.

Def 47: H est dit maximal dans G si $H \subsetneq K \leq G$ implique $K = G$.

Def 48: On appelle sous groupe de Frattini de G le sous-groupe :
$$F(G) = \bigcap_{\substack{H \text{ maximal dans } G \\ H \leq G}} H$$

Prop 49: $F(G) \sqsubset G$.

Prop 50: Si $H \sqsubset K$ et $K \triangleleft G$, alors $H \triangleleft G$.

C-Ex 51: On a : $\langle (12)(34) \rangle \triangleleft \langle \text{bitranspositions} \rangle \triangleleft \mathfrak{S}_4$ mais $\langle (12)(34) \rangle$ n'est pas distingué dans $\mathfrak{S}_4$.

2) Sous-groupe dérivé.

Def 52: On appelle commutateur de $x, y \in G$ $[x,y] := xyx^{-1}y^{-1}$.

Def 53: On appelle groupe dérivé de G le sous-groupe de G engendré par les commutateurs. On le note $D(G)$.

Prop 54: $D(G) \sqsubset G$

Prop 55: G abélien ssi $D(G) = (e)$.

Prop 56 : • $D(GL_n(k)) = SL_n(k)$ sauf ($k = \mathbb{F}_2$ et $n = 2$)

• $D(SL_n(k)) = SL_n(k)$ sauf ($k = \mathbb{F}_2, n = 2$) ou ($k = \mathbb{F}_3$ et $n = 2$).

Prop 57 : $H \triangleleft G$ et $G/_H$ abélien $\Longleftrightarrow D(G) \subset H$.

L'abélianisé de G : $G/_{D(G)}$ est le plus gros quotient abélien de G.

Thm 58 : Soient $\tilde{G}$ un groupe abélien et $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, \tilde{G})$.
Alors il existe un unique $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(G/_{D(G)}, \tilde{G})$ tel que :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{G} \\ G/_{D(G)} \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

App 59 : Si $n > 2$ ou si $k \neq \mathbb{F}_2$, alors pour tout morphisme $\varphi : GL_n(k) \to \tilde{G}$, où $\tilde{G}$ groupe abélien, il existe un unique $\delta \in \mathrm{Hom}(k^\times, \tilde{G})$ tel que : $\varphi = \delta \circ \det$. [O.A]

3) Sous-groupes distingués de $SL_n(k)$ et $GL_n(k)$. [PER]

On se place dans le cas où $D(SL_n(k)) = SL_n(k)$.

Prop 60 : On note $\mu_n(k)$ le groupe des racines $n^{\text{ème}}$ de 1 dans k.
Alors $Z(SL_n(k)) = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mu_n(k)\} \simeq \mu_n(k)$.

Thm 61 : • Les sous-groupes distingués de $SL_n(k)$ sont les sous-groupes du centre $Z(SL_n(k))$.

• Les sous-groupes distingués de $GL_n(k)$ sont :

DEV 1

1) les sous-groupes du centre de $GL_n(k)$ qui sont de la forme $H I_n$ avec $H \leq k^\times$.

2) Les sur-groupes de $D(GL_n(k)) = SL_n(k)$. Ils sont de la forme $\det^{-1}(H)$ avec $H \leq k^\times$ et isomorphes à $SL_n(k) \rtimes H$.

IV / p-groupes et Théorème de Sylow. [CAL]

Def 62 : G est un p-groupe, avec p premier, s'il est d'ordre p^n avec $n \geq 1$.

Prop 63 : Le centre d'un p-groupe est non trivial.

Thm 64 : Soit G un p-groupe, alors $G/_{F(G)}$ est un $\mathbb{F}_p$-ev et sa dimension est égale au cardinal minimal d'une famille génératrice de G. [ZAV]

DEV 2

Cor 65 : Toutes les familles génératrices de cardinal minimal de G ont le même cardinal, où G est un p-groupe.

Def 66 : Soit G un groupe de cardinal $p^\alpha q$, avec $\alpha \geq 1$, p premier et $p \nmid q$. On appelle p-Sylow de G tout sous-groupe d'ordre p^α

Prop 67 : Un p-groupe H de G est un p-Sylow ssi $[G:H] \wedge p = 1$.

Thm 68 : Soit G un groupe de cardinal $p^\alpha q$, avec $\alpha \geq 1$, p premier et $p \nmid q$. Alors :

1) G contient un p-Sylow.

2) Deux p-Sylows sont toujours conjugués dans G.

3) Le nombre n_p de p-Sylows vérifie :

$$\begin{cases} n_p = 1\ [p] \\ n_p \mid q \end{cases}$$

App 70 : Soient $p > q$ deux nombres premiers distincts, alors tout groupe d'ordre pq est soit isomorphe à $\mathbb{Z}/_{pq\mathbb{Z}}$, soit isomorphe à $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} \rtimes \mathbb{Z}/_{q\mathbb{Z}}$ où tous les produits semi-directs sont isomorphes entre eux s'ils sont non triviaux. De plus si $q - 1 \nmid p$, alors le groupe est cyclique.

Prop 69 : Soit H un p-Sylow de G. Alors :
$H \triangleleft G \Longleftrightarrow n_p = 1$.

App 71 : Tout groupe d'ordre $p^\alpha q$ avec p premier, $p > q$ et $\alpha \geq 1$ n'est pas simple.

Ex 72 : Si $|G| \in \{6, 15, 18, 20, 50, 54 \ldots\}$ alors G n'est pas simple

App 73 : Soient $p > q > r$ des nombres premiers. Alors tout groupe d'ordre pqr n'est pas simple.

Ex 74 : Si $|G| \in \{30, 42, 66, 78 \ldots\}$ alors G n'est pas simple.