

# Etude du flot de la courbure moyenne

Thomas COURANT

Stage de M1 dirigé par Frédéric Rochon  
Laboratoire du CIRGET, UQAM, Montréal  
Mai-Juin 2023

# Table des matières

<b>1 Définition du flot de la courbure moyenne pour une variété compacte dans <math>\mathbb{R}^{n+1}</math></b>	<b>2</b>
1.1 Immersion, plongement et difféomorphisme . . . . .	2
1.2 Cadre de notre étude . . . . .	5
1.3 Définition du flot de la courbure moyenne . . . . .	5
1.4 Variation de l'aire d'une sous-variété . . . . .	7
<b>2 Existence du flot et Principe du maximum</b>	<b>10</b>
2.1 Théorème d'existence . . . . .	10
2.2 Exemple de flot . . . . .	15
2.2.1 Cas du graphe . . . . .	15
2.2.2 Cas de la courbe de niveau . . . . .	16
2.2.3 Cas de la sphère . . . . .	16
2.3 Principe du Maximum et principe de comparaison . . . . .	17
<b>3 Flot de la courbure moyenne défini sur un intervalle de temps maximal</b>	<b>24</b>
3.1 Equations d'évolution des quantités géométriques . . . . .	24
3.2 Caractérisations des singularités . . . . .	31
<b>Références</b>	<b>38</b>
<b>A Notion de géométrie riemannienne</b>	<b>39</b>
A.1 Champ de Tenseurs . . . . .	39
A.2 Métrique Riemannienne . . . . .	42
A.2.1 Métrique sur les champs de vecteurs . . . . .	43
A.2.2 Métrique sur les champs de tenseurs . . . . .	45
A.3 Dérivée covariante . . . . .	46
A.3.1 Dérivée covariante d'un champ de vecteur . . . . .	46
A.3.2 Dérivée covariante d'un champ de tenseur . . . . .	49
A.3.3 Etude de la divergence . . . . .	52
A.4 Application exponentielle . . . . .	54
<b>B Courbure d'une variété</b>	<b>56</b>
B.1 Tenseur de Rieman-Christoffel . . . . .	56
B.2 Cas des sous-variétés et seconde forme fondamentale . . . . .	60
B.3 Cas des sous-variétés de co-dimension 1 . . . . .	64
B.3.1 Cas générale . . . . .	64
B.3.2 Cas particulier des hypersurfaces de $\mathbb{R}^{n+1}$ . . . . .	66
<b>C Exemples de variétés</b>	<b>69</b>
C.1 Graphe d'une fonction . . . . .	69
C.2 Courbe de niveau . . . . .	70

## Introduction

Le but de ce rapport est de présenter le travail fait pendant mon stage de M1 au laboratoire CIRGET de l'UQAM à Montréal encadré par Frédéric Rochon. L'objectif en était l'étude du flot de la courbure moyenne pour une variété orientable compacte de dimension  $n$  immergée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Plus précisément le but est de faire varier une variété en tout point selon son vecteur normal avec comme vitesse sa courbure moyenne. De manière équivalente cela revient à considérer une famille  $C^\infty$  d'immersion  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  qui vérifie l'équation non linéaire (les coefficients du laplacien dépendent aussi de  $\varphi$ ) suivante

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = \Delta \varphi_t.$$

N'ayant pas suivi de cours de géométrie riemannienne avant ce stage, il m'a fallu commencer par étudier différentes notions nécessaires pour l'étude du flot. On trouvera en appendice le travail effectué avec notamment l'introduction des différents concepts et tout les résultats de géométrie riemannienne que l'on aura besoin durant notre étude. La partie suivante est la plus importante car elle se concentre sur l'étude même du flot de la courbure moyenne pour une variété compacte immergée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

## 1 Définition du flot de la courbure moyenne pour une variété compacte dans $\mathbb{R}^{n+1}$

L'objectif va être d'étudier le flot de la courbure moyenne d'une variété orientable compacte de dimension  $n$  immergée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Mais on commence par montrer quelques résultats sur les immersions, les plongements et les difféomorphismes qui nous seront utile dans notre étude. Par la suite nous désignerons par le terme variété une variété différentielle orientable.

### 1.1 Immersion, plongement et difféomorphisme

On commence par introduire les notions de plongement et d'immersion qui nous seront très utiles dans la suite de notre étude. Les preuves des différentes propositions et lemmes viennent du livre Differential Topology de Victor Guillemin, Alan Pollack [1].

#### Définition 1.1.1. Immersion et plongement

Soit  $\varphi: M \rightarrow N$ , une application  $C^\infty$ , alors  $\varphi$  est une immersion si en tout point  $p \in M$ ,  $d_p \varphi: T_p M \rightarrow T_p N$  est injective.

Si de plus  $\varphi: M \rightarrow \varphi(M)$  est un homéomorphisme alors  $\varphi$  est un plongement.

Un premier résultat important c'est que localement les immersions se comportent comme les plongements.

**Lemme 1.1.1.** Soit  $M$  une variété différentiable et  $G: M \rightarrow N$  une immersion en  $p$ , alors il existe un voisinage  $U$  de  $p$  dans  $M$  tel que  $G|_U$  soit injective.

Si  $M$  est compacte alors  $G|_U: U \rightarrow N$  est un plongement.

*Démonstration.* Par l'absurde on suppose que non, donc on peut trouver une suite de point  $(p_n, q_n) \in M$  tel que  $p_n \neq q_n$ ,  $p_n \rightarrow p$ ,  $q_n \rightarrow p$  et  $G(p_n) = G(q_n)$ . De plus on note  $(V, \gamma)$  une carte de  $M$  au voisinage de  $p$ , ainsi pour  $n$  assez grand on a  $p_n, q_n \in V$ , et on peut poser :

$$v_n = \frac{\gamma(p_n) - \gamma(q_n)}{\|\gamma(p_n) - \gamma(q_n)\|} \in S^n.$$

Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que  $v_n \rightarrow v \in S^n$  et on a :

$$d_{\gamma(p)}(G \circ \gamma^{-1})(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(p_n) - G(q_n)}{\|\gamma(p_n) - \gamma(q_n)\|} = 0.$$

Or  $v \neq 0$  et la différentielle est injective car  $G$  est une immersion en  $p$ , ce qui est absurde.

On suppose maintenant  $M$  compacte, il nous reste à montrer que  $G|_U: U \rightarrow G(U)$  est un homéomorphisme.

Or on sait déjà qu'elle est bijective, et pour  $K$  un fermé de  $U$  on sait que  $K = U \cap F$  où  $F$  est un fermé de  $M$  donc compacte. Par continuité de  $G$ ,  $G(F)$  est compacte donc fermée. Ainsi  $G(K) = G(U) \cap G(F)$  est un fermé de  $G(U)$  donc  $G|_U$  est un homéomorphisme.  $\square$

**Remarque 1.1.1.** *Le principal but des plongements c'est que si l'on a deux variétés  $M$  et  $N$  et un plongement  $\varphi: M \rightarrow N$  alors  $\varphi(M)$  est une sous-variété de  $N$  de même dimension que  $M$ . Et d'après le lemme que l'on vient de montrer si  $\varphi$  n'est qu'une immersion alors comme localement c'est un plongement pour tout point  $\varphi(p) \in \varphi(M)$  on peut trouver un voisinage ouvert  $U$  de  $\varphi(p)$  dans  $\varphi(M)$  telle que  $U$  soit une sous-variété de  $N$  de même dimension que  $M$ . en particulier par injectivité de  $d_p\varphi$ , il introduit un isomorphisme*

$$d_p\varphi: T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \varphi(M).$$

Maintenant on va montrer des lemmes techniques qui nous seront utiles plus tard. L'objectif est de montrer que les conditions "être une immersion", "être un plongement" et "être un difféomorphisme" sont ouvertes dans un certain sens.

**Lemme 1.1.2.** *Immersion est une condition ouverte*

Soit  $M$  un variété compacte de dimension  $n$  et  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , une application  $C^\infty$  telle que  $\varphi_0$  soit une immersion. Alors il existe  $T \geq T_1 > 0$  tel que pour tout  $t \in [0, T_1[$ ,  $\varphi_t$  soit une immersion.

*Démonstration.* Il nous faut montrer qu'il existe  $T_1 > 0$  tel que :

$$\forall t \in [0, T_1[, \forall p \in M, d_p\varphi_t \text{ soit injective.}$$

Soit  $p \in M$ , montrons qu'il existe  $U(p)$  un voisinage de  $p$  et  $T(p) > 0$  tel que pour tout  $t \in [0, T(p)[$  et pour tout  $p \in U(p)$ ,  $d_p\varphi_t$  soit injective.

Soit  $V$  un voisinage de  $p$  où on a des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ . On sait que pour tout  $p \in p'$ ,

$$d_p\varphi_0 = \left[ \frac{\partial\varphi_0}{\partial x^1}(p) \mid \dots \mid \frac{\partial\varphi_0}{\partial x^n}(p) \right]$$

est injective.

On peut donc trouver une  $n \times n$  sous matrice avec un déterminant non nul. Or  $\varphi$  étant  $C^\infty$  et  $M$  compacte, on a que :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}(\cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}(\cdot, 0) \quad \text{uniformément sur } M.$$

Donc par continuité du déterminant il existe  $T(p) > 0$  et un voisinage  $U(p)$  de  $p$ , telle que pour tout  $t \in [0, T(p)[$  et  $p' \in U(p)$ , le déterminant de la  $n \times n$  sous-matrice soit non nul, donc  $d_{p'}\varphi_t$  est injective.

Or  $M = \bigcup_{p \in M} U(p)$ , donc par compacité de  $M$ , on peut extraire un nombre fini de point  $(p_1, \dots, p_d)$  tel que  $M = \bigcup_{i=1}^d U(p_i)$ , et en posant  $T_1 = \min_{i=1, \dots, d} T(p_i)$  on a le résultat voulu.  $\square$

On montre un résultat similaire pour les plongements.

**Lemme 1.1.3.** *Plongement est une condition ouverte*

Soit  $M$  une variété compacte de dimension  $n$  et  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , une application  $C^\infty$  telle qu'il existe  $t \in [0, T[$  soit un plongement alors il existe un voisinage  $V$  de  $t$  dans  $[0, T[$  tel que pour tout  $s \in V$ ,  $\varphi_s$  soit un plongement.

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde, donc il existe une suite  $s_i \in [0, T[$  telle que  $s_i \rightarrow t$  et  $\varphi_{s_i}$  ne soit pas une immersion, en particulier ne soit pas injective.

Donc il existe deux suites  $p_i, q_i \in M$  telles que  $p_i \neq q_i$  et :

$$\varphi(p_i, s_i) = \varphi(q_i, s_i)$$

Maintenant on pose

$$G: M \times [0, T[ \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$(p, s) \longmapsto (\varphi_s(p), s) ,$$

en particulier on a

$$G(p_i, s_i) = G(q_i, s_i) \quad \text{et} \quad p_i \neq q_i.$$

Or par compacité de  $M$ , quitte à considérer des sous-suites que l'on notera encore  $p_i$  et  $q_i$ , il existe  $p, q \in M$  tels que :

$$p_i \longrightarrow p \quad \text{et} \quad q_i \longrightarrow q.$$

Mais par continuité de  $G$  et passage à la limite on a,  $G(p, t) = G(q, t)$  donc  $p = q$  car  $\varphi_t$  est un plongement. On se place dans des coordonnées,  $(x^1, \dots, x^n)$  au voisinage de  $p$ ,  $G$  est clairement différentiable en  $(p, t)$  et on a :

$$d_{(p,t)}G = \left[ \begin{array}{c|c} d_p\varphi_t & \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} \\ \hline 0 \dots \dots \dots 0 & 1 \end{array} \right]$$

où  $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Or  $\varphi_t$  est un plongement en particulier sa différentielle en  $p$  est injective, donc il existe  $n$  colonnes linéairement indépendantes de la matrice  $d_p\varphi_t$ , donc on peut trouver  $n + 1$  colonnes linéairement indépendantes (ajouter la dernière colonne) ainsi  $d_{(p,t)}G$  est injective, donc  $G$  est une immersion en  $(p, t)$ .

On peut donc utiliser le lemme précédent (1.1.1), qui nous dit qu'il existe  $U$  un voisinage de  $(p, t)$  dans  $M \times [0, T[$  tel que  $G|_U$  soit injective.

Or pour  $i$  assez grand on a  $(p_i, s_i), (q_i, s_i) \in U$ , or  $G(p_i, s_i) = G(q_i, s_i)$  et  $p_i \neq q_i$ , ce qui est absurde.

Ainsi il existe  $V$ , un voisinage de  $t$ , tel que pour tout  $s \in V$   $\varphi_s$  est injective. Montrons que c'est un plongement. On sait déjà que  $\varphi_s$  est une immersion, il nous faut donc montrer que c'est un homéomorphisme sur son image. Comme  $\varphi_s$  est injective, il nous faut montrer que l'inverse est continue. Soit  $K$  un fermé de  $M$ , alors  $K$  est compacte car  $M$  compacte, donc  $\varphi_s(K)$  est un compact donc un fermé donc  $\varphi_s$  est une application propre. Ainsi  $\varphi_s^{-1}$  est continue, donc  $\varphi_s$  est un plongement.  $\square$

Et il nous reste à montrer le même résultat pour les difféomorphismes dont on rappelle la définition.

**Définition 1.1.2.** *Difféomorphisme*

Soit  $\varphi: M \rightarrow N$  alors  $\varphi$  est un difféomorphisme si c'est une bijection différentiable dont la bijection réciproque est aussi différentiable.

**Lemme 1.1.4.** Soit  $M$  une variété compacte de dimension  $n$  et  $g: M \times [0, T[ \rightarrow M$ , une application  $C^\infty$  telle que  $g_0$  soit un difféomorphisme. Alors il existe  $T \geq T_1 > 0$  tel que pour tout  $t \in [0, T_1[$ ,  $g_t$  soit un difféomorphisme.

*Démonstration.* On sait que  $g_0$  est un difféomorphisme, en particulier c'est une immersion. En raisonnant comme dans la preuve du lemme 1.1.2 on sait qu'il existe  $T_1 > 0$ , tel que pour tout  $t \in [0, T_1[$ , pour tout  $p \in M$ ,  $d_p g_t$  est bijectif.

Ainsi par le théorème d'inversion local,  $g_t$  est un difféomorphisme local. Or en raisonnant comme dans la preuve du lemme précédent 1.1.3, on peut montrer qu'il existe  $T_2 > 0$  tel que pour tout  $t \in [0, T_1[$ ,  $g_t$  soit injective.

Ainsi sur  $[0, \min\{T_1, T_2\}[$ ,  $g_t$  est un difféomorphisme.  $\square$

Il nous reste à rappeler que si on a une immersion  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  on peut définir une métrique sur  $M$  en tirant en arrière le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposition 1.1.1.** Soit  $M$  une variété différentielle et  $v_p: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  une immersion. On définit une métrique  $g$  sur  $M$ , par

$$\forall p \in M, \forall X, Y \in \Gamma(M, N), \quad g_p(X, Y) = \langle d_p f(X), d_p f(Y) \rangle.$$

Pour plus de détail sur ce point on peut aller voir la partie A.2 de l'appendice A.

## 1.2 Cadre de notre étude

On considère  $M$  une variété compacte de dimension  $n$  et  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  une immersion. On considère comme métrique sur  $M$  celle définie par le tiré en arrière par  $\varphi$  du produit scalaire de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ainsi dans un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  les coefficients de  $g$  sont donnés par

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi} x^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle.$$

Localement on sait que  $\varphi(M)$  est une sous-variété de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  en particulier si  $p \in M$  et  $(x^1, \dots, x^n)$  est un système de coordonnées dans un voisinage de  $p$  alors  $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$  est une base de  $T_p M$  et une base de  $T_{\varphi(p)} \varphi(M)$  est donnée par  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x^n}\right)$ . On désigne donc le vecteur normal par  $\nu$  qui est au minimum défini localement et on note  $A$  la seconde forme fondamentale scalaire dont ses coefficients sont donnés par

$$h_{ij} = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \nu \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}, \nu \right\rangle.$$

Ainsi les équations de Gauss (B.2.2) et de Weingarten (B.2.1) nous donnent directement

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + h_{ij} \nu \quad \text{et} \quad \frac{\partial \nu}{\partial x^i} = -h_{il} g^{lj} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}.$$

Ceci nous permet de démontrer la relation suivant entre le laplacien de  $\varphi$  et la courbure moyenne  $H$ , en effet

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= g^{ij} \nabla_{i,j}^2 \varphi \\ &= g^{ij} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) \\ &= g^{ij} h_{ij} \nu \\ &= H \nu, \end{aligned}$$

On a donc

$$\Delta \varphi = H \nu. \tag{1.2.1}$$

## 1.3 Définition du flot de la courbure moyenne

Soit  $M$  une variété compacte de dimension  $n$  et  $\varphi_t: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  une famille d'immersion, on a deux points de vue pour définir le flot de la courbure moyenne. Soit on veut que la famille  $\varphi_t$  vérifie une équation similaire à celle de l'équation de la chaleur, c'est à dire

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = \Delta \varphi_t.$$

Où  $\Delta$  est le laplacien sur  $M$  définie avec comme métrique le produit scalaire de  $\mathbb{R}^{n+1}$  tiré en arrière par  $\varphi_t$ . Ainsi cette équation n'est pas linéaire. Un autre point de vue possible et de faire directement bouger la variété  $\varphi_t(M)$  selon son vecteur normal avec comme vitesse sa courbure moyenne. C'est à dire que la famille  $\varphi_t$  doit vérifier

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(p, t) = H(p, t) \nu(p, t).$$

Où  $H(p, t)$  et  $\nu(p, t)$  désigne la courbure moyenne et le vecteur normal au point  $\varphi_t(p)$  de la sous-variété  $\varphi_t(M)$ . Or la relation (1.2.1) nous démontre que les deux approches sont similaires, on peut donc définir le flot de la courbure moyenne.

### Définition 1.3.1. Flot de la courbure moyenne

Soit  $\varphi_0: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , une immersion avec  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ . Le flot de la courbure moyenne est une fonction  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $C^\infty$ , solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p, t) = \Delta \varphi_t(p) = H(p, t) \nu(p, t) & \forall (p, t) \in M \times [0, T[ \\ \varphi(p, 0) = \varphi_0(p) & \forall p \in M \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Le problème de cette définition c'est qu'en apparence elle n'est pas invariante par composition par un difféomorphisme, en effet si on a une famille de difféomorphisme  $\Psi_t: M \rightarrow M$  et que l'on compose  $\varphi_t$  par  $\Psi_t$  on ajoute une perturbation tangentielle. On a donc besoin de la proposition suivante.

**Proposition 1.3.1.** *Invariance géométrique par une perturbation tangentielle*

Soit  $M$  une variété différentiable compacte de dimension  $n$ ,  $\varphi_0: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  une immersion et  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  une famille  $C^\infty$  d'immersion solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p, t) = H(p, t)\nu(p, t) + X(p, t) & \forall (p, t) \in M \times [0, T[ \\ \varphi(p, 0) = \varphi_0(p) & \forall p \in M \end{cases} \quad (1.3.2)$$

où  $X(\cdot, t)$  est un champ de vecteur  $C^\infty$  sur  $\varphi_t(M)$ , i.e  $\forall (p, t) \in M \times [0, T[, X(p, t) \in T_{\varphi_t(p)}\varphi_t(M)$ .

Alors il existe une unique famille  $C^\infty$  de difféomorphisme  $\Psi_t: M \rightarrow M$ , tel que  $\tilde{\varphi}_t = \varphi_t(\Psi_t)$  soit un flot de la courbure moyenne avec comme donnée initiale  $\varphi_0$ .

Réciproquement soit  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  une famille  $C^\infty$  d'immersion telle qu'il existe une famille de  $C^\infty$  de difféomorphisme  $\Psi_t: M \rightarrow M$ , tel que  $\Psi(p, 0) = p$  et  $\tilde{\varphi}(p, t) = \varphi(\Psi(p, t), t)$  soit un flot de la courbure moyenne alors il existe un champ de vecteur  $X(\cdot, t)$  dépendant du temps tel que  $\varphi$  vérifie le système 1.3.2

*Démonstration.* Soit  $\varphi$  vérifiant le système 1.3.2, comme  $d_p\varphi_t$  est injective et  $d_p\varphi_t(T_p M) = T_{\varphi_t(p)}\varphi_t(M)$ , on peut définir un champ de vecteur  $C^\infty$ , sur  $M$  par,

$$Y(p, t) = -[d_p\varphi_t]^{-1}(X(p, t)).$$

Et on s'intéresse à l'équation différentielle pour  $p \in M$  fixé,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(p, t) = Y(\Psi(p, t), t) & \forall t \in [0, T[, \\ \Psi(p, 0) = p \end{cases}$$

qui est une EDO sur  $M$ , et comme  $M$  est compacte,  $Y(\cdot, t)$  est  $C^\infty$  on a par le théorème d'existence et d'unicité des EDO sur une variété compacte qu'il existe un unique  $\Psi$  vérifiant ce système. De plus  $\Psi_t$  étant la résolvante on sait que c'est un difféomorphisme. On pose donc  $\tilde{\varphi}_t = \varphi_t(\Psi_t)$ , et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(p, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\Psi(p, t), t) + d_{\Psi(p, t)}\varphi_t \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t}(p, t) \right) \\ &= H(\Psi(p, t), t)\nu(\Psi(p, t), t) + X(p, t) + d_{\Psi(p, t)}\varphi_t(Y(\Psi(p, t))) \\ &= H(\Psi(p, t), t)\nu(\Psi(p, t), t) + X(\Psi(p, t), t) - d_{\Psi(p, t)}\varphi_t \left[ [d_{\Psi(p, t)}\varphi_t]^{-1}(X(\Psi(p, t), t)) \right] \\ &= H(\Psi(p, t), t)\nu(\Psi(p, t), t) \\ &= \tilde{H}(p, t)\tilde{\nu}(p, t). \end{aligned}$$

où  $\tilde{H}(p, t)$  et  $\tilde{\nu}(p, t)$  son respectivement la courbure moyenne et le vecteur normal au point  $\tilde{\varphi}(p, t)$ .

De plus comme  $\Psi(p, 0) = p$ , on a  $\tilde{\varphi}(p, 0) = \varphi(p, 0) = \varphi_0(p)$ , ainsi  $\tilde{\varphi}$  est un flot de la courbure moyenne.

Pour l'unicité, si  $\tilde{\varphi}(p, t) = \varphi(\Psi(p, t), t)$  est un flot de la courbure moyenne, alors par les calculs précédents on a :

$$X(\Psi(p, t)) = -d_{\Psi(p, t)}\varphi_t \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t}(p, t) \right),$$

donc

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(p, t) = Y(\Psi(p, t), t), \quad \text{avec } Y(p, t) = -[d_p\varphi_t]^{-1}(X(p, t)).$$

De plus  $\tilde{\varphi}(p, 0) = \varphi_0(p) = \varphi(p, 0)$  donc  $\Psi(p, 0) = p$ , donc  $\Psi$  est unique.

Réciproquement, si  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  est une famille  $C^\infty$  d'immersion telle qu'il existe une famille de

$C^\infty$  de difféomorphisme  $\Psi_t: M \rightarrow M$ , tel que  $\Psi(p, 0) = p$  et  $\tilde{\varphi}(p, t) = \varphi(\Psi(p, t), t)$  soit un flot de la courbure moyenne alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(p, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\Psi(p, t), t) + d_{\Psi(p, t)}\varphi_t \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t}(p, t) \right) \\ &= \tilde{H}(p, t)\tilde{\nu}(p, t). \end{aligned}$$

Donc comme pour  $t \in [0, T[$ ,  $\Psi_t$  est un difféomorphisme, on a :

$$\forall q, t \in M \times [0, T[, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(q, t) = H(p, t)\nu(q, t) - d_q\varphi_t \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\Psi_t^{-1}(q), t) \right).$$

De plus  $\varphi(p, 0) = \varphi(\Psi(p, 0), 0) = \tilde{\varphi}(p, 0) = \varphi_0(p)$  donc  $\varphi$  vérifie le système 1.3.2 avec :

$$X(p, t) = -d_q\varphi_t \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\Psi_t^{-1}(q), t) \right).$$

□

Ainsi cette proposition nous permet d'avoir le corollaire important suivant qui nous permet "d'alléger" la définition d'un flot de la courbure moyenne.

**Corollaire 1.3.1.1.** *Soit une famille  $C^\infty$  d'immersion,  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  qui vérifie :*

$$\begin{cases} \langle \partial_t \varphi, \nu \rangle = H \\ \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0 \end{cases}$$

*Alors il existe une unique reparamétrisation de  $\varphi$  en un flot de la courbure moyenne.*

#### 1.4 Variation de l'aire d'une sous-variété

L'objectif maintenant va être de justifier l'intérêt du flot de la courbure moyenne, pour cela nous allons commencer par calculer la variation de l'aire d'une sous-variété si on l'a fait bouger selon une direction plus précisément.

Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  et  $\varphi_0: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  une immersion, on considère l'aire de  $M$  défini par :

$$\text{Aire}(\varphi) = \int_M d\mu,$$

où dans des coordonnées  $d\mu = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \dots dx^n$ .

On considère une variation compacte de  $\varphi_0$ , c'est à dire une fonction  $\varphi: M \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $C^\infty$ , telle qu'il existe un compacte  $K$  de  $M$  tel que pour tout  $p \in M \setminus K$ ,  $\varphi(p, t) = \varphi_0(p)$  et que  $\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0$ .

On suppose que  $\text{Aire}(\varphi_0) < +\infty$ , et pour  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  on définit de la même manière :

$$\text{Aire}(\varphi_t) = \int_M d\mu_t \quad \text{où} \quad d\mu_t = \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dx^1 \dots dx^n$$

or par compacité de  $K$  pour  $t_1 \in ]0, \varepsilon[$  on peut trouver  $C$  une constante telle que,

$$\forall t \in [-t_1, t_1], \forall p \in K, \sqrt{\det(g)} \leq C.$$

Ainsi, pour  $t \in [-t_1, t_1]$ ,

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\varphi_t) &= \int_M d\mu_t \\ &= \int_{M \setminus K} d\mu_t + \int_K d\mu_t \\ &\leq \int_{M \setminus K} d\mu + C \int_K dx^1 \dots dx^n \\ &\leq \text{Aire}(\varphi_0) + C \int_K dx^1 \dots dx^n < +\infty \end{aligned}$$



Ainsi, quitte à réduire  $\varepsilon$ , on peut supposer que pour tout  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ ,  $\text{Aire}(\varphi_t) < +\infty$ .

L'objectif va être de calculer la variation de l'air en  $t = 0$ , pour cela on note  $X = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\cdot, 0)$ , en particulier  $X = 0$  sur  $M \setminus K$ . Pour  $p \in M$ , on sait que l'on peut décomposer  $\mathbb{R}^{n+1}$  comme :

$$\mathbb{R}^{n+1} = d_p \varphi_0(T_p M) \oplus \mathbb{R}v.$$

Ainsi on peut écrire :

$$X = X^M + \langle X, v \rangle v.$$

On peut calculer la variation de la métrique en 0,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}(0) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle \right)(0) \\ &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \left\langle X, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \left\langle X, \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right\rangle \right) - 2 \left\langle X, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \left\langle X^M, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \left\langle X^M, \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right\rangle \right) - 2 \left\langle X, \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + h_{ij} v \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \left\langle X^M, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \left\langle X^M, \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right\rangle \right) - 2 \Gamma_{ij}^k \left\langle X^M, \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right\rangle - 2 h_{ij} \langle X, v \rangle \end{aligned}$$

Or  $d_p \varphi_0: T_p M \rightarrow d_p \varphi_0(T_p M)$  est bijectif, ainsi on peut trouver un champ de vecteurs  $\tilde{X}^M$  sur  $M$  tel que  $d_p \varphi_0(\tilde{X}^M) = X^M$ . De plus grâce à la métrique  $g$ ,  $\tilde{X}^M$  définit une 1-forme sur  $M$  notée  $\omega$  et dans des coordonnées on a :

$$\omega_i = g_{ij} (\tilde{X}^M)^j = g \left( \tilde{X}^M, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left\langle X^M, \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right\rangle.$$

Ainsi on peut simplifier l'écriture de  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}(0)$ , en effet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}(0) &= \frac{\partial}{\partial x^i} (\omega_j) + \frac{\partial}{\partial x^j} (\omega_i) - 2 \Gamma_{ij}^k \omega_k - 2 h_{ij} \langle X, v \rangle \\ &= \nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i - 2 h_{ij} \langle X, v \rangle \end{aligned}$$

Or, d'après la preuve du théorème de la divergence, on peut calculer  $\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\det(g)})$ , en effet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\det(g)}) &= \frac{1}{2} \sqrt{\det(g)} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} && \text{voir (A.3.1)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\det(g)} \left( g^{ij} \nabla_i \omega_j + g^{ij} \nabla_j \omega_i - 2 g^{ij} h_{ij} \langle X, v \rangle \right) \end{aligned}$$

Or on a  $H = g^{ij} h_{ij}$  et de plus comme  $\nabla g = 0$  et par symétrie de  $g$ ,

$$g^{ij} \nabla_j \omega_i = g^{ij} \nabla_i \omega_j = g^{ij} g \left( \nabla_i \tilde{X}^M, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = g^{ij} g_{kj} (\nabla_i \tilde{X}^M)^k = \delta_k^i (\nabla_i \tilde{X}^M)^k = (\nabla_i \tilde{X}^M)^i = \text{div}(\tilde{X}^M)$$

On en conclut donc que,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\det(g)}) = \sqrt{\det(g)} (\text{div}(\tilde{X}^M) - H \langle X, v \rangle)$$

On peut maintenant calculer la variation de l'air en 0.

Par compacité de  $K$  on peut trouver un nombre fini d'ouverts  $U_1, \dots, U_k$  tel que,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^k U_i.$$

De plus sur chaque  $U_i$ , on note  $x_i^1, \dots, x_i^n$  un système de coordonnées et on notera  $dx_i = dx_i^1 \dots dx_i^n$ . De plus on sait qu'il existe une partition de l'unité  $(\chi_i)_{i=1, \dots, k}$  liée à la famille  $(U_i)_{i=1, \dots, k}$ . Ce qui nous donne en 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \text{Aire}(\varphi_t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_K d\mu_t \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{M \setminus K} d\mu_t \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_K \sum_{i=1}^k \chi_i d\mu_t \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^k \int_{U_i} \chi_i \sqrt{\det(g)} dx_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{U_i} \chi_i \frac{\partial}{\partial t} \left( \sqrt{\det(g)} \right) dx_i \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{U_i} \chi_i \left( \text{div}(\tilde{X}^M) - H \langle X, \nu \rangle \right) \sqrt{\det(g)} dx_i \\
&= \int_K \text{div}(\tilde{X}^M) - H \langle X, \nu \rangle d\mu_0 \\
&= \int_M \text{div}(\tilde{X}^M) - H \langle X, \nu \rangle d\mu_0 \\
&= - \int_M H \langle X, \nu \rangle d\mu_0 \qquad \text{par le théorème de la divergence (A.3.1)}
\end{aligned}$$

On peut bien inverser la dérivée et l'intégrale car  $X = 0$  sur  $M \setminus K$ , donc par compacité de  $K$  il existe une constante  $C > 0$ , tel que :

$$|\text{div}(\tilde{X}^M) - H \langle X, \nu \rangle| \leq C$$

Ainsi sur  $U_i$ , on a,

$$\int_{U_i} |\chi_i \sqrt{\det(g)}| dx^i \leq C \int_{U_i} \sqrt{\det(g)} dx^i = \int_{U_i} d\mu_0 \leq \text{Aire}(\varphi_0) < +\infty$$

On peut donc bien intervertir dérivée et intégrale et on vient de montrer que :

$$\frac{\partial \text{Aire}(\varphi_t)}{\partial t} = - \int_M H \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\cdot, 0), \nu \right\rangle d\mu_0$$

Il est assez simple de voir que l'on peut choisir pour  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\cdot, 0)$  n'importe quel champ de vecteurs. En effet pour  $X \in \Gamma(M)$  si on pose  $\varphi(p, t) = \varphi_0(p) + t d_p \varphi_0(X_p)$  d'après le lemme (1.1.2) on sait que pour  $t$  assez petit  $\varphi(\cdot, t)$  est une immersion et on a directement

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\cdot, 0) = d_p \varphi_0(X).$$

L'intérêt de considérer  $X = H\nu$  dans le flot de la courbure moyenne permet de diminuer l'aire de la variété le plus rapidement possible en fixant la norme  $L^2$ . En particulier si  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  est un flot de la courbure moyenne on a

$$\frac{\partial \text{Aire}(\varphi_t)}{\partial t} = - \int_M H^2 d\mu_t.$$

Ce qui donne la majoration suivante

$$\text{Aire}(\varphi_0) \geq \int_0^T \int_M H^2 d\mu_t.$$

**Remarque 1.4.1.** Si on veut que notre variété soit un point critique de cette fonctionnelle, c'est à dire être un candidat pour minimiser son aire, on doit avoir pour tout champ  $X$ ,

$$\int_M H \langle X, \nu \rangle d\mu = 0.$$

C'est à dire  $H = 0$  sur  $M$ , c'est la définition d'une surfaces minimales.

## 2 Existence du flot et Principe du maximum

Dans cette partie l'objectif va être de démontrer l'existence et l'unicité du flot de la courbure moyenne. On donnera aussi l'exemple de certains flots de la courbure moyenne et on finira par certains résultats importants sur le flot et pour cela on utilisera le principe du maximum.

### 2.1 Théorème d'existence

L'objectif maintenant va être de montrer l'existence et l'unicité du flot de la courbure moyenne dans le cadre que l'on s'est fixé.

**Théorème 2.1.1** (Existence et unicité). *Soit  $M$  une variété compacte de dimension  $n$  et  $\varphi_0: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  une immersion, alors il existe une unique solution  $\varphi \in C^\infty(M \times [0, T[)$  au problème :*

$$\begin{cases} \partial_t \varphi = H\nu \\ \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0 \end{cases}$$

*De plus la solution dépend de manière  $C^\infty$  de la donnée initiale  $\varphi_0$ .*

Il existe une multitude de preuves différentes pour ce théorème et on peut en trouver une liste non exhaustive dans le livre de Carlos Montegazza [2]. Ici on présente la preuve détaillée dans ce livre qui a été initialement présentée par Huisken et Polden dans leur article [3]. Cette preuve est la plus intuitive, l'objectif est de clairement décrire le mouvement du flot pour des petits temps. Elle fait appel à la résolution d'une équation parabolique quasi-linéaire sur une variété compacte, on trouvera à l'appendice A du livre de Carlos Montegazza [2] une résolution détaillée de ce genre d'équation, la preuve ayant été d'abord trouvée par Huisken et Polden dans leur article [3].

*Démonstration.* On commence par le cas où  $\varphi_0$  est un plongement, ainsi  $\nu_0$  est bien définie partout et l'application  $\nu_0: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  est  $C^\infty$ .

Existence :

On cherche  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi = H\nu \\ \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0 \end{cases}$$

Comme  $\varphi_0$  est une immersion, si on a une solution  $\varphi$  du problème par le lemme 1.1.2, quitte à réduire  $T$ , on peut supposer que pour tout  $t \in [0, T[$ ,  $\varphi_t$  soit une immersion.

Or par le corollaire 1.3.1.1, on sait qu'il suffit de trouver une solution  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $C^\infty$  du problème suivant :

$$\begin{cases} \langle \partial_t \varphi(p, t), \nu(p, t) \rangle = H(p, t) & \forall (p, t) \in M \times [0, T[ \\ \varphi(p, 0) = \varphi_0(p) & \forall p \in M \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Il existera alors un unique reparamétrage de  $\varphi$  par une famille de difféomorphisme en un flot de la courbure moyenne.

Pour trouver  $\varphi$ , l'idée va être de trouver un voisinage de  $\varphi_0(M)$  dans lequel on pourra décrire le déplacement de  $\varphi_t(M)$  par le graphe d'une fonction  $f$  au dessus de  $\varphi_0(M)$ .

Plus précisément pour montrer l'existence d'une solution, on fixe  $T > 0$  et on cherche  $f \in C^\infty(M \times [0, T[)$  avec comme condition initiale  $f(\cdot, 0) = 0$  tel que,

$$\begin{aligned} \varphi: M \times [0, T[ &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (p, t) &\mapsto \varphi_0(p) + f(p, t)\nu_0(p) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

vérifie le système 2.1.1.

Pour savoir quelle équation doit vérifier  $f$ , nous allons devoir calculer les quantités géométriques de l'hypersurface  $\varphi_t(M)$ , pour cela on fixe  $(p, t) \in M \times [0, T[$ , et dans des coordonnées on notera respectivement

$g_{ij}(p, t)$  et  $h_{ij}(p, t)$  les composantes des première et deuxième formes fondamentales en  $(p, t)$ .

Et on a pour la métrique :

$$\begin{aligned}
g_{ij}(p, t) &= \langle \partial_i \varphi(p, t), \partial_j \varphi(p, t) \rangle \\
&= \langle \partial_i \varphi_0(p) + \partial_i f v_0(p) + f \partial_i v_0(p), \partial_j \varphi_0(p) + \partial_j f v_0(p) + f \partial_j v_0(p) \rangle \\
&= \langle \partial_i \varphi_0(p) + \partial_i f v_0(p) - f h_i^k \partial_k \varphi_0, \partial_j \varphi_0(p) + \partial_j f v_0(p) - f h_j^l \partial_l \varphi_0 \rangle \quad \text{car } \partial_i v_0 = -h_i^k \partial_k \varphi_0 \\
&= g_{ij}(p, 0) + \partial_i f \partial_j f + \langle \partial_i \varphi_0, \partial_j f v_0 - f h_j^k \partial_k \varphi_0 \rangle + \langle \partial_i f v_0, \partial_j \varphi_0 - f h_j^l \partial_l \varphi_0 \rangle \\
&\quad - \langle f h_i^k \partial_k \varphi_0, \partial_j \varphi_0 - f h_j^l \partial_l \varphi_0 \rangle \\
&= g_{ij}(p, 0) + \partial_i f \partial_j f - f h_i^k(p, 0) g_{jk}(p, 0) - f h_j^l(p, 0) g_{il}(p, 0) + f^2 h_i^k(p, 0) h_j^l(p, 0) g_{kl}(p, 0) \\
&= g_{ij}(p, 0) + \partial_i f(p, t) \partial_j f(p, t) - 2f(p, t) h_{ij}(p, 0) + f^2(p, t) h_{jk}(p, 0) h_{il}(p, 0) g^{kl}(p, 0)
\end{aligned}$$

On remarque donc que  $g$ , et son inverse, dépendent de manière  $C^\infty$  de  $f$  et  $\nabla f$ .

De plus, on sait que le plan tangent en  $\varphi(p, t)$  a pour base :

$$\partial_i \varphi(p, t) = \partial_i \varphi_0(p) + \partial_i f - f h_i^k(p, 0) \partial_k \varphi_0(p)$$

Ainsi un vecteur normal est donné par,

$$v(p, t) = v_0(p) - \langle v_0(p), \partial_i \varphi(p, t) \rangle g^{ij} \partial_j \varphi(p, t).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\langle v, \partial_i \varphi \rangle &= \langle v_0(p), \partial_i \varphi(p, t) \rangle - \langle v_0(p), \partial_i \varphi(p, t) \rangle g^{ij} \langle \partial_i \varphi(p, t), \partial_j \varphi(p, t) \rangle \\
&= \langle v_0(p), \partial_i \varphi(p, t) \rangle - \langle v_0(p), \partial_i \varphi(p, t) \rangle g^{ij} g_{ij} \\
&= 0
\end{aligned}$$

De plus,  $\langle v_0(p), \partial_i \varphi(p, t) \rangle = \partial_i f(p, t)$  d'où :

$$v(p, t) = v_0(p) - \partial_i f g^{ij} \partial_j \varphi(p, t)$$

Or on a  $f(., 0) = 0$  ainsi  $\nabla f(., 0) = 0$  d'où  $\|v(p, 0)\| = 1$  et donc par compacité de  $M$ , quitte à réduire  $T$ , on peut supposer qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $(p, t) \in M \times ]0, T[$ ,  $\|v(p, t)\| \geq C > 0$ .

On peut donc renormaliser  $v$  en posant,

$$v(p, t) = \frac{v_0(p) - \partial_i f g^{ij} \partial_j \varphi(p, t)}{\|v_0(p) - \partial_i f g^{ij} \partial_j \varphi(p, t)\|}$$

On peut donc maintenant calculer les coefficients de la seconde forme fondamentale :

$$\begin{aligned}
h_{ij}(p, t) &= \langle v(p, t), \partial_{ij}^2 \varphi(p, t) \rangle \\
&= \langle v(p, t), \partial_j (\partial_i \varphi_0(p) + \partial_i f - f h_i^k(p, 0) \partial_k \varphi_0(p)) \rangle \\
&= \langle v(p, t), \partial_{ij}^2 f v_0 + \partial_{ij}^2 \varphi_0 + \partial_i f \partial_j v_0 - \partial_j f h_i^k \partial_k \varphi_0 + f \partial_{i,j}^2 v_0 \rangle \\
&= \langle v(p, t), \partial_{ij}^2 f v_0 \rangle + \langle v(p, t), \partial_{ij}^2 \varphi_0 + \partial_i f \partial_j v_0 - \partial_j f h_i^k \partial_k \varphi_0 + f \partial_{i,j}^2 v_0 \rangle \\
&= \langle v(p, t), v_0 \rangle \partial_{ij}^2 f + P^{ij}(p, f(p, t), \nabla(p, t)),
\end{aligned}$$

où  $P^{ij}$  est une fonction  $C^\infty$  pour  $f$  et  $\nabla f$  petit, donc pour des petits temps.

Ainsi on a pour la courbure moyenne,

$$\begin{aligned}
H(p, t) &= g^{ij}(p, t) h_{ij}(p, t) \\
&= \langle v(p, t), v_0 \rangle g^{ij} \partial_{ij}^2 f + g^{ij} P^{ij}(p, f(p, t), \nabla(p, t)) \\
&= \langle v(p, t), v_0 \rangle \Delta_{g(t)} f + \langle v(p, t), v_0 \rangle g^{ij} \Gamma_{ij}^k \partial_k f + g^{ij} P^{ij}(p, f(p, t), \nabla(p, t)) \\
&= \langle v(p, t), v_0 \rangle \Delta_{g(t)} f + P(p, f(p, t), \nabla f(p, t)),
\end{aligned}$$

où  $P(\cdot, f, \nabla f)$  est  $C^\infty$  pour des petits temps. En effet les symboles de Christoffel sont calculés par les dérivées premières de la métrique qui elles dépendent de manière  $C^\infty$  de  $f$  et  $\nabla f$ .

Or on veut résoudre le système 2.1.1, donc avoir  $\langle \partial_t \varphi(p, t), \nu(p, t) \rangle = H(p, t)$ , ainsi :

$$\begin{aligned} \partial_t f(p, t) \langle \nu_0(p), \nu(p, t) \rangle &= \langle \partial_t \varphi(p, t), \nu(p, t) \rangle \\ &= H(p, t) \\ &= \langle \nu_0(p), \nu(p, t) \rangle \Delta_{g(t)} f(p, t) + P(p, f(p, t), \nabla f(p, t)). \end{aligned}$$

Or comme  $\langle \nu_0(p), \nu(p, 0) \rangle = 1$ , et  $M$  compacte on peut supposer que  $T$  soit assez petit pour qu'il existe  $D > 0$  tel que  $\langle \nu_0(p), \nu(p, t) \rangle \geq D > 0$  sur  $M \times [0, T[$ .

D'où,

$$\begin{aligned} \partial_t f(p, t) &= \Delta_{g(t)} f(p, t) + \frac{P(p, f(p, t), \nabla f(p, t))}{\langle \nu_0(p), \nu(p, t) \rangle} \\ &= \Delta_{g(t)} f(p, t) + Q(p, f(p, t), \nabla f(p, t)) \end{aligned}$$

Où  $Q$  est une application  $C^\infty$ , pour des petites valeurs de  $f$  et  $\nabla f$ .

On a donc que si  $f: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $C^\infty$  qui vérifie l'équation parabolique quasi-linéaire suivante :

$$\begin{cases} \partial_t f(p, t) = \Delta_{g(t)} f(p, t) + Q(p, f(p, t), \nabla f(p, t)) & \forall (p, t) \in M \times [0, T[ \\ f(p, 0) = 0 & \forall p \in M \end{cases} \quad (2.1.3)$$

alors  $\varphi$  définie par 2.1.2,  $\varphi = \varphi_0 + f\nu_0$ , est un flot de la courbure moyenne sur  $[0, T[$  avec  $T > 0$  assez petit. Or c'est une équation parabolique quasi-linéaire donc il existe une unique solution  $f \in C^\infty(M \times [0, T[)$ , au système 2.1.3. Pour plus de détaille sur la résolution de ce genre d'équation on peut aller voir l'annexe A du livre de Carlo Montegazza [2] ou à l'article de Polden et Huisken [3]. Ainsi  $\varphi$  vérifie le système 2.1.1 et d'après le corollaire 1.3.1.1 il existe une unique famille de difféomorphisme qui reparamétrise  $\varphi$  en un flot de la courbure moyenne. Par la suite on notera  $\varphi_E = \varphi$  et  $\tilde{\varphi}_E$  le flot de la courbure moyenne obtenue après reparamétrisation.

#### Unicité :

Maintenant soit  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  un flot de la courbure moyenne, on veut montrer que  $\varphi = \tilde{\varphi}_E$ .

Pour cela nous allons montrer que dans un petit voisinage de  $\varphi_0(M)$ , quitte à composer par une famille de difféomorphisme et réduire  $T$ , on peut écrire  $\varphi_t$  comme le graphe d'une fonction  $f$  par dessus  $\varphi_0(M)$ , c'est à dire de la même forme que dans l'existence.

Nous allons donc commencer par montrer le fait suivant :

**Fait :** Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que la fonction  $\Psi$  :

$$\begin{aligned} \Psi: M \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ &\longrightarrow \Omega \\ (p, s) &\longmapsto \varphi_0(p) + s\nu_0(p) \end{aligned} \quad ,$$

soit un difféomorphisme, avec  $\Omega = \Psi(M \times ]-\varepsilon, \varepsilon[)$ .

On commence par montrer que pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\Psi$  est un difféomorphisme local. Ainsi soit  $p \in M$ , alors  $\Psi$  est différentiable en  $(p, 0)$  et on a :

$$\begin{aligned} d_{(p,0)} \Psi: T_p M \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (h, t) &\longmapsto d_p \varphi_0 \cdot h + t\nu_0(p) \end{aligned}$$

qui est bijectif.

Ainsi par le théorème d'inversion local il existe  $V(p)$  un voisinage ouvert de  $p$  et  $\eta(p) > 0$  tel que  $\Psi: V \times ]-\eta, \eta[ \rightarrow \Psi(V \times ]-\eta, \eta[)$  soit un difféomorphisme. Or on a  $M = \bigcup_{p \in M} V(p)$ , par compacité de  $M$ , on

peut donc considérer une famille finie  $(V_i)_{i=1,\dots,k}$  d'ouverts recouvrant  $M$  et on prend  $\varepsilon = \min_{i=1,\dots,k} \eta_i > 0$ .

On montre maintenant l'injectivité, pour cela on raisonne par l'absurde, on suppose que pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'application  $\Psi$ , définie par :

$$\Psi: \begin{array}{l} M \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \longrightarrow \Omega \\ (p, s) \longmapsto \varphi_0(p) + s\nu_0(p) \end{array} ,$$

ne soit pas injective.

Ainsi pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $(p_\varepsilon, s_\varepsilon), (p'_\varepsilon, s'_\varepsilon) \in M \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  tel que  $(p_\varepsilon, s_\varepsilon) \neq (p'_\varepsilon, s'_\varepsilon)$  et :

$$\varphi_0(p'_\varepsilon) + s'_\varepsilon \nu_0(p'_\varepsilon) = \varphi_0(p_\varepsilon) + s_\varepsilon \nu_0(p_\varepsilon)$$

Or par compacité de  $M$  et car  $\varphi_0$  est un plongement, il existe des sous-suites, que l'on notera encore  $(p'_\varepsilon)$  et  $(p_\varepsilon)$ , qui converge dans  $M$  et on note  $p'$  et  $p$  les limites.

De plus,

$$\|\varphi_0(p'_\varepsilon) - \varphi_0(p_\varepsilon)\| \leq |s'_\varepsilon| + |s_\varepsilon| < 2\varepsilon.$$

Donc par passage à la limite,  $\varphi_0(p') = \varphi_0(p)$  et donc  $p = p'$  par injectivité de  $\varphi_0$ .

On utilise le fait que  $\Psi$  est un difféomorphisme local en  $p$ . Il existe donc  $V$  un voisinage ouvert de  $p$  et  $\eta > 0$  tel que  $\Psi: V \times ]-\eta, \eta[ \longrightarrow \Psi(V \times ]-\eta, \eta[)$  soit un difféomorphisme. Or pour  $\varepsilon$  assez petit on a  $p_\varepsilon, p'_\varepsilon \in V$  et  $s_\varepsilon, s'_\varepsilon \in ]-\eta, \eta[$ , et :

$$\Psi(p_\varepsilon, s_\varepsilon) = \varphi_0(p_\varepsilon) + s_\varepsilon \nu_0(p_\varepsilon) = \varphi_0(p'_\varepsilon) + s'_\varepsilon \nu_0(p'_\varepsilon) = \Psi(p'_\varepsilon, s'_\varepsilon),$$

donc

$$(p_\varepsilon, s_\varepsilon) = (p'_\varepsilon, s'_\varepsilon).$$

Ce qui est absurde, on conclut donc que  $\Psi$  est un difféomorphisme pour  $\varepsilon$  assez petit.

Il nous faut montrer maintenant que  $\varphi_t$  reste dans  $\Omega = \Psi(M \times ]-\varepsilon, \nu\varepsilon[)$  au moins pour des petits temps, c'est le fait suivant :

**Fait :** Il existe  $T_1 > 0$  tel que :

$$\forall t \in [0, T_1[, \quad \varphi_t(M) \subset \Omega$$

Tout d'abord nous allons montrer qu'il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $p \in M$ ,  $B(\varphi_0(p), \eta) \subset \Omega$ .

Comme  $\Psi$  est un difféomorphisme et  $\Omega$  sont image, pour tout  $p \in M$ ,  $\Omega$  est un voisinage ouvert de  $\varphi_0(p)$ .

De plus  $\Omega$  est borné, en effet par compacité de  $M$ ,  $\varphi_0(M)$  est borné et :

$$\forall (p, s) \in M \times ]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \|\Psi(p, s) - \varphi_0(p)\| = |s| < \varepsilon$$

On peut donc poser, pour tout  $p \in M$ ,  $\eta(p) = \sup \{r \in \mathbb{R}^+, B(\varphi_0(p), r) \subset \Omega\}$ . Montrons maintenant que  $\eta: M \longrightarrow \mathbb{R}^+$  est une application continue.

Soit  $p \in M$  et  $\mu > 0$ , par continuité de  $\varphi_0$  il existe un voisinage  $V$  de  $p$  dans  $M$ , tel que pour tout  $p' \in V$  alors  $\|\varphi_0(p) - \varphi_0(p')\| < \mu$ .

Soit  $p' \in V$ , alors il existe  $x \in B(\varphi_0(p'), \eta(p') + \mu)$  tel que  $x \notin \Omega$  et on a :

$$\|x - \varphi_0(p)\| \leq \|x - \varphi_0(p')\| + \|\nu p_0(p') - \varphi_0(p)\| < \eta(p') + 2\mu.$$

Donc  $B(\varphi_0(p), \eta(p') + 2\mu) \not\subset \Omega$  donc  $\eta(p) \leq \eta(p') + 2\mu$ .

De plus,  $B(\varphi_0(p'), \eta(p') - \mu) \subset \Omega$  et soit  $x \in B(\varphi_0(p), \eta(p') - 2\mu)$ , alors :

$$\|x - \varphi_0(p')\| \leq \|x - \varphi_0(p)\| + \|\nu p_0(p') - \varphi_0(p)\| < \eta(p') - \mu$$

Donc  $B(\varphi_0(p), \eta(p') - 2\mu) \subset \Omega$  donc  $\eta(p) \geq \eta(p') - 2\mu$ . Ainsi,

$$|\eta(p') - \eta(p)| \leq 2\mu,$$

donc  $\eta$  est continue et par compacité de  $M$ , on peut poser  $\eta = \frac{1}{2} \min_{p \in M} \eta(p)$  et on a pour tout  $p \in M$ ,  $B(\varphi_0(p), \eta) \subset \Omega$ .

Pour finir, il nous reste à montrer l'assertion suivante :

$$\exists T_1 > 0, \forall t \in [0, T_1[, \forall p \in M, \|\varphi(p, t) - \varphi_0(p)\| \leq \eta$$

On sait que la famille  $(\varphi_t)$  est une famille continue de fonction  $C^\infty(M, \mathbb{R}^{n+1})$ , donc soit  $(U_i, \gamma_i)_{i \in I}$  ( $I$  est finie) un atlas de  $M$ . Ainsi pour tout  $i \in I$ ,  $\varphi_t \circ \gamma_i^{-1}$  converge vers  $\varphi_0 \circ \gamma_i^{-1}$  pour la topologie  $C^\infty$ .

De plus par compacité de  $M$ , on peut trouver une famille finie  $(p_k)_{k=1, \dots, N}$  de point de  $M$  et  $r_k \in \mathbb{R}^+$  telle que :

$$M = \bigcup_{k=1, \dots, N} \gamma_{\pi_k}^{-1} \left( \overline{B(\gamma_{\pi_k}(p_k), r_k)} \right),$$

où  $p_k \in U_{\pi_k}$ .

Pour  $k \in [1; N]$  on note  $K_k = \gamma_{\pi_k}^{-1} \left( \overline{B(\gamma_{\pi_k}(p_k), r_k)} \right)$ , par convergence  $C^\infty$ , comme  $\overline{B(\gamma_{\pi_k}(p_k), r_k)}$  est compacte, il existe  $T_k > 0$  tel que  $\forall t \in [0, T_k[, \sup_{p \in K_k} \|\varphi_t(p) - \varphi_0(p)\| \leq \eta$ .

On pose simplement  $T_1 = \min_{k=1, \dots, N} T_k > 0$ , et on a :

$$\forall t \in [0, T_1[, \|\varphi_t(p) - \varphi_0(p)\| \leq \sup_{k=1, \dots, N} \sup_{p \in K_k} \|\varphi_t(p) - \varphi_0(p)\| \leq \eta,$$

on a donc le résultat voulu.

Ainsi on a l'existence de  $T > 0$  tel que pour tout  $t \in [0, T[, \varphi_t(M) \subset \Omega$ .

On utilise maintenant le fait que  $\Psi: M \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \Omega$  est un difféomorphisme, on peut donc définir  $h \in C^\infty(M \times [0, T])$  et  $g \in C^\infty(M \times [0, T], M)$  par :

$$\forall (p, t) \in M \times [0, T[, \quad h(p, t) = \Pi_{]-\varepsilon, \varepsilon[} [\Psi^{-1}(\varphi(p, t))],$$

$$\forall (p, t) \in M \times [0, T[, \quad g(p, t) = \Pi_M [\Psi^{-1}(\varphi(p, t))],$$

où  $\Pi_{]-\varepsilon, \varepsilon[}$  et  $\Pi_M$  sont les projections de  $M \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$ .

On a donc,

$$\forall (p, t) \in M \times [0, T[, \quad \varphi(p, t) = \varphi_0(g(p, t)) + h(p, t)v_0(g(p, t)).$$

De plus comme  $\varphi(p, 0) = \varphi_0(p)$  et  $\varphi_0$  est un plongement, on sait que  $g(p, 0) = p$  et  $h(p, 0) = 0$ .

Ainsi  $g_0: M \rightarrow M$  est un difféomorphisme de  $M$ , donc d'après le lemme 1.1.4, quitte à réduire  $T$ , on peut supposer que pour tout  $t \in [0, T[, g_t: M \rightarrow M$  est un difféomorphisme.

Ainsi en posant  $f(p, t) = h(g_t^{-1}(p), t)$ , on peut définir  $\chi$  comme :

$$\forall (p, t) \in M \times [0, T[, \quad \chi(p, t) = \varphi(g_t^{-1}(p), t) = \varphi_0(p) + f(p, t)v_0(p).$$

Donc  $\chi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  est une famille  $C^\infty$  d'immersion, ainsi d'après la proposition sur l'invariance géométrique par une perturbation tangentielle (1.3.1), on sait que  $\chi$  vérifie le système suivant ( $g_0$  étant l'identité) :

$$\begin{cases} \langle \partial_t \chi, v \rangle = H \\ \chi(\cdot, 0) = \varphi_0 \end{cases}$$

Ainsi d'après les calculs précédents  $f$  vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f(p, t) = \Delta_{g(t)} f(p, t) + Q(p, f(p, t), \nabla f(p, t)) & \forall (p, t) \in M \times [0, T[ \\ f(p, 0) = 0 & \forall p \in M \end{cases}$$

Or par unicité de la solution à ce problème on a exactement que :

$$\chi = \varphi_E$$

Or par le corollaire 1.3.1.1, on sait qu'il existe une unique famille de difféomorphisme qui reparamétrise  $\chi$  et donc  $\varphi_E$  en un flot de la courbure moyenne.

Or si on reparamétrise  $\chi$  par la famille de difféomorphisme  $(g_t)$  on obtient  $\varphi$  qui est par hypothèses un flot de la courbure moyenne. Et on sait que  $\varphi_E$  se reparamétrise en  $\tilde{\varphi}_E$  qui est un flot de la courbure moyenne, ainsi par unicité on a :

$$\varphi = \tilde{\varphi}_E.$$

On a donc montré l'unicité.

### Dépendance $C^\infty$ en la donnée initiale

Comme  $f$  vient de la résolution d'une équation parabolique quasi-linéaire on sait par l'annexe A du livre de Carlo Montegazza [2] que  $f$  dépend de manière  $C^\infty$  de ses données initiales qui eux dépendent de manière  $C^\infty$  de  $\varphi_0$ , on a donc le résultat voulu.

Dans le cas où  $\varphi_0$  est seulement une immersion il faut faire attention à la définition de  $\Psi$  le vecteur normal n'étant pas définie globalement. Nous ne détaillerons pas cette preuve ici mais pour les lecteurs intéressés nous renvoyons à l'article fondateur de Polden et Huiken [3] et au livre de Carlo Montegazza [2].  $\square$

## 2.2 Exemple de flot

Dans cette partie nous allons présenter quelques exemples de flots, le cas d'un graphe, d'une courbe de niveau et celui de la sphère. Cela nous permettra notamment de se rendre compte de la non linéarité de l'équation  $\langle \partial_t \varphi, \nu \rangle = H$ .

### 2.2.1 Cas du graphe

On s'intéresse au cas du graphe. Ainsi on fixe une variété compacte  $M$  de dimension  $n$  et  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  une famille  $C^\infty$  d'immersion. De plus on suppose que localement il existe  $\Omega$  un ouvert d'un hyperplan de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et une fonction  $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tels que dans des coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  on a

$$\varphi(p, t) = (x^1(p), \dots, x^n(p), f(x^1(p), \dots, x^n(p), t)).$$

Ainsi si on note  $f_t(\cdot) = f(\cdot, t)$  on sait d'après la sous-partie C.1 que l'on a

$$H(p, t) = \frac{\Delta f_t}{\sqrt{1 + |\nabla f_t|^2}} - \frac{\text{Hess}(f_t)(\nabla f_t, \nabla f_t)}{\left(\sqrt{1 + |\nabla f_t|^2}\right)^3} = \text{div} \left( \frac{\nabla f_t}{\sqrt{1 + |\nabla f_t|^2}} \right),$$

et

$$\nu(p, t) = -\frac{(\nabla f_t, -1)}{\sqrt{1 + |\nabla f_t|^2}}.$$

De plus on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left( 0, \frac{\partial f}{\partial t} \right).$$

Ainsi on a

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nu \right\rangle = H \iff \frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f_t - \frac{\text{Hess}(f_t)(\nabla f_t, \nabla f_t)}{1 + |\nabla f_t|^2} = \sqrt{1 + |\nabla f_t|^2} \text{div} \left( \frac{\nabla f_t}{\sqrt{1 + |\nabla f_t|^2}} \right).$$

Donc d'après le corollaire (1.3.1.1)  $\varphi$  est un flot de la courbure moyenne si et seulement si  $f$  vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f_t - \frac{\text{Hess}(f_t)(\nabla f_t, \nabla f_t)}{1 + |\nabla f_t|^2} = \sqrt{1 + |\nabla f_t|^2} \text{div} \left( \frac{\nabla f_t}{\sqrt{1 + |\nabla f_t|^2}} \right).$$



### 2.2.2 Cas de la courbe de niveau

On considère maintenant le cas où on a une famille  $C^\infty$ ,  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , de plongement, en particulier  $\varphi_t$  est un homéomorphisme sur son image. De plus on suppose qu'il existe une fonction

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \varphi_t(M) = f_t^{-1}(\{0\}).$$

Ainsi d'après la sous-partie (C.2) on sait que pour  $p \in M$  et  $t \in [0, T[$  on a

$$H(p, t) = \left[ -\frac{\Delta f_t}{|\nabla f_t|} + \frac{\text{Hess}(f_t)(\nabla f_t, \nabla f_t)}{|\nabla f_t|^3} \right](\varphi_t(p))$$

et

$$v(p, t) = \frac{\nabla f_t}{|\nabla f_t|}(\varphi_t(p))$$

De plus pour  $p \in M$  on a  $f(\varphi_t(p), t) = 0$  ce qui donne

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(\varphi_t(p)) = -\nabla f_t(\varphi_t(p)) \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(p).$$

Ainsi pour  $p \in M$  et  $t \in [0, T[$  on a l'équivalence

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, v \right\rangle = H &\iff \left\langle \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(p), \frac{\nabla f_t}{|\nabla f_t|}(\varphi_t(p)) \right\rangle = H(p, t) \\ &\iff \frac{\partial f_t}{\partial t}(\varphi_t(p)) = \left[ \Delta f_t - \frac{\text{Hess}(f_t)(\nabla f_t, \nabla f_t)}{|\nabla f_t|^2} \right](\varphi_t(p)). \end{aligned}$$

En utilisant que  $\varphi_t$  est un homéomorphisme et le corollaire (1.3.1.1) on a que  $\varphi$  est un flot de la courbure moyenne si et seulement si  $f$  vérifie

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t - \frac{\text{Hess}(f_t)(\nabla f_t, \nabla f_t)}{|\nabla f_t|^2} = |\nabla f| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right).$$

### 2.2.3 Cas de la sphère

On s'intéresse tout particulièrement au cas de la sphère, ceci nous étant utile par la suite. Ainsi, on considère la sphère de rayon  $R$  de dimension  $n$ ,  $M = S^n(R)$  et  $\varphi_0: S^n(R) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  le plongement canonique de la sphère unité. On sait donc que l'on a existence et unicité du flot de la courbure moyenne. Or, par symétrie de la sphère, il est naturelle de penser que pour tout  $t$  le flot restera une sphère dont seulement le rayon sera modifié, ainsi on cherche le flot sous la forme :

$$\varphi: \begin{array}{l} S^n(R) \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (p, t) \mapsto R(t)\varphi_0(p) \end{array} ,$$

où  $R: [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  et  $R(0) = R$ .

On a donc,

$$\varphi_t(M) = S^n(R(t)) = f_t^{-1}(\{0\}),$$

avec  $f_t: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $f_t(x) = \|x\|^2 - R(t)^2$ . En particulier on a :

$$\begin{aligned} \cdot \nabla f_t(x) &= 2x \\ \cdot \Delta f_t &= 2(n+1) \end{aligned}$$

Ainsi comme  $\varphi_t(M)$  est décrit par une courbe de niveau, on peut exprimer sa courbure moyenne et son vecteur normal grâce à  $f$  d'après la sous-partie C.2 :

$$H(p, t) = -\frac{\Delta f_t}{\|\nabla f_t\|} + \frac{\text{Hess } f_t(\nabla f_t, \nabla f_t)}{\|\nabla f_t\|^3} = -\frac{n+1}{R(t)} + \frac{R(t)^2}{R(t)^3} = -\frac{n}{R(t)},$$

et

$$v = \frac{\nabla f_t(\varphi_t(p))}{\|\nabla f_t(\varphi_t(p))\|} = \frac{\varphi_t(p)}{R(t)} = \varphi_0(p).$$

De plus on a  $\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(p) = R'(t)\varphi_0(p)$ .

Ainsi  $\varphi$  est un flot de la courbure moyenne si et seulement si on a :

$$R'(t)\varphi_0(p) = -\frac{n}{R(t)}\varphi_0(p),$$

ainsi on a pour  $R$ ,

$$R(t) = \sqrt{R^2 - 2nt}.$$

En particulier  $T_{\max} \leq \frac{R^2}{2n}$  et à la limite la sphère devient singulière et le flot est de la forme :

$$\begin{aligned} \varphi: S^n(R) \times [0, \frac{R^2}{2n}[ &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ p, t &\longmapsto \sqrt{R^2 - 2nt} \varphi_0(t) \end{aligned}$$

### 2.3 Principe du Maximum et principe de comparaison

Le principal outil que l'on va utiliser pour étudier le flot va être le principe du maximum.

#### **Théorème 2.3.1.** *Principe du maximum*

Soit  $M$  une variété différentiable et  $g(t)$ , pour  $t \in [0, T[$ , une famille  $C^\infty$  de métrique sur  $M$ .

Soit  $u: M \times [0, T[ \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^2$  qui vérifie :

$$\partial_t u \leq \Delta_{g(t)} u + g_t(X(p, t, u), \nabla u) + b(u),$$

où  $X$  est un champ de vecteur continue et  $b$  une fonction localement lipschitzienne.

On suppose que pour tout  $t \in [0, T[$  il existe  $\delta > 0$  et  $K$  un compacte de  $M \setminus \partial M$  tel que pour tout  $t' \in ]t - \delta, t + \delta[ \cap ]0, T[$  le maximum de  $u(\cdot, t')$  est atteint en au moins un point de  $K$ .

On pose  $u_{\max}(t) = \max_{p \in M} u(p, t)$ , alors  $u_{\max}$  est localement lipschitzienne, différentiable presque partout et on a pour tout  $t \in [0, T[$  où  $u_{\max}$  est différentiable :

$$\frac{du_{\max}}{dt} \leq b(u_{\max})$$

De plus si  $h: [0, T'[ \longrightarrow \mathbb{R}$ , ( $T' \leq T$ ) est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} h'(t) = b(h(t)) \\ h(0) = u_{\max}(0) \end{cases}$$

alors  $u \leq h$  sur  $M \times [0, T'[$ .

Le premier point du théorème grâce au lemme suivant, appelé "Hamilton's trick".

#### **Lemme 2.3.1.** *Hamilton's trick*

Soit  $u: M \times [0, T[ \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^1$  telle que pour tout  $t \in [0, T[$  il existe  $\delta > 0$  et  $K$  un compacte de  $M \setminus \partial M$  tel que pour tout  $t' \in ]t - \delta, t + \delta[ \cap ]0, T[$  le maximum de  $u(\cdot, t')$  est atteint en au moins un point de  $K$ .

Alors  $u_{\max}$  est localement lipschitzienne sur  $]0, T[$ , différentiable presque partout et on a pour tout  $t \in [0, T[$  où  $u_{\max}$  est différentiable :

$$\frac{du_{\max}}{dt}(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(p, t),$$

où  $p \in M$  et  $u_{\max}(t) = u(p, t)$ .

Le résultat est le même pour  $u_{\min}(t) = \min_{p \in M} u(p, t)$ .

*Démonstration.* Soit  $t \in ]0, T[$ , il existe  $\delta > 0$  et  $K$  un compacte qui vérifie les hypothèses.

Montrons que  $u_{\max}$  est lipschitzienne sur  $]t - \delta, t + \delta[$ . Comme  $u$  est  $C^1$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que  $u$  soit  $C$ -lipschitzienne sur  $K \times ]t - \delta, t + \delta[$ .

Pour  $-\delta < \varepsilon < \delta$ , il existe  $q \in K$  tel que :

$$u_{\max}(t + \varepsilon) = u(q, t + \varepsilon) \leq u(q, t) + |\varepsilon|C \leq u_{\max}(t) + |\varepsilon|C,$$

donc

$$\frac{u_{\max}(t + \varepsilon) - u_{\max}(t)}{|\varepsilon|} \leq C.$$

De même, il existe  $p \in K$  tel que :

$$u_{\max}(t) = u(p, t) \leq u(p, t + \varepsilon) + |\varepsilon| C \leq u_{\max}(t + \varepsilon) + |\varepsilon| C,$$

donc

$$\left| \frac{u_{\max}(t + \varepsilon) - u_{\max}(t)}{\varepsilon} \right| \leq C.$$

Ainsi  $u_{\max}$  est localement lipschitzienne donc différentiable presque partout d'après le théorème de Rademacher.

Soit  $t$  un point où  $u_{\max}$  est différentiable et soit  $p \in M$  tel que  $u_{\max}(t) = u(p, t)$ .

Soit  $0 < \varepsilon < \delta$ , par le développement de Taylor il existe  $t^+(\varepsilon) \in ]t, t + \varepsilon[$  tel que :

$$u(p, t + \varepsilon) = u(p, t) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(p, t^+(\varepsilon)),$$

donc

$$u_{\max}(t + \varepsilon) \geq u(p, t + \varepsilon) = u_{\max}(t) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(p, t^+(\varepsilon)),$$

donc

$$\frac{u_{\max}(t + \varepsilon) - u_{\max}(t)}{\varepsilon} \geq \frac{\partial u}{\partial t}(p, t^+(\varepsilon)).$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, comme  $t^+(\varepsilon) \rightarrow t$ , on a :

$$\frac{du_{\max}}{dt}(t) \geq \frac{\partial u}{\partial t}(p, t)$$

De même pour  $-\delta < \varepsilon < 0$ , il existe  $t^-(\varepsilon) \in ]t + \varepsilon, t[$  tel que :

$$\frac{u_{\max}(t + \varepsilon) - u_{\max}(t)}{\varepsilon} \leq \frac{\partial u}{\partial t}(p, t^-(\varepsilon)).$$

ainsi, en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0,

$$\frac{du_{\max}}{dt}(t) \leq \frac{\partial u}{\partial t}(p, t)$$

On a donc le résultat voulu :

$$\frac{du_{\max}}{dt}(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(p, t).$$

Pour  $u_{\min}$  il suffit d'appliquer le lemme avec  $v = -u$ . □

On peut maintenant prouver le théorème.

*Démonstration.* On commence par montrer le premier point.

Par le lemme 2.3.1, on sait que la fonction  $u_{\max}$  est localement lipschitzienne, presque partout différentiable et pour  $t \in ]0, T[$  où  $u_{\max}$  est différentiable on a :

$$\frac{du_{\max}}{dt}(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(p, t).$$

avec  $p \in M$  tel que  $u_{\max}(t) = u(p, t)$ . Ainsi on a donc,

$$\frac{du_{\max}}{dt}(t) \leq \Delta_{g(t)} u(p, t) + g_t(X(p, t, u), \nabla u)(p, t) + b(u(p, t)).$$

Or  $u(\cdot, t)$  est maximal en  $p$  donc on a déjà montré dans le lemme sur les extremums sur une variété A.4.2, qu'on a :

- .  $\nabla u(p, t) = 0$ ,
- .  $\Delta_{g(t)} u(p, t) \geq 0$ ,

d'où,

$$\frac{du_{\max}}{dt}(t) \leq b(u(p, t)) = b(u_{\max}(t)).$$

Pour le deuxième point, on considère  $h: [0, T'] \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $T' \leq T$ ) une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} h'(t) = b(h(t)) \\ h(0) = u_{\max}(0) \end{cases}$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , on pose  $h_\varepsilon: [0, T'' ] \rightarrow \mathbb{R}$  la solution maximale de :

$$\begin{cases} h'_\varepsilon(t) = b(h_\varepsilon(t)) \\ h_\varepsilon(0) = u_{\max}(0) \end{cases}$$

On fixe  $\delta > 0$ ,  $b$  est localement lipschitzienne donc globalement lipschitzienne sur le compacte  $\{h(t) \mid t \in [0, T' - \delta]\} \cup \{h_\varepsilon(t) \mid t \in [0, T' - \delta]\}$ , on note  $C$  sa constante de Lipschitz. Alors  $h_\varepsilon \rightarrow h$  uniformément sur  $[0, T' - \delta]$ , en effet :

$$\begin{aligned} |h(t) - h_\varepsilon(t)| &\leq \varepsilon + \int_0^t |b(h(s)) - b(h_\varepsilon(s))| ds \\ &\leq \varepsilon + C \int_0^t |h(s) - h_\varepsilon(s)| ds, \end{aligned}$$

et par le lemme de Grönwall,  $|h(t) - h_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon e^{Ct} \leq \varepsilon e^{C(T' - \delta)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ .

Par l'absurde on suppose qu'il existe  $t \in ]0, T' - \delta]$  tel que  $u_{\max}(t) > h_\varepsilon(t)$  et on définit,

$$\bar{t} = \inf\{t \in [0, T' - \delta] \mid u_{\max}(t) > h_\varepsilon(t)\}.$$

On a  $\bar{t} > 0$  car  $u_{\max}(0) = h_\varepsilon(0) - \varepsilon$  et  $u_{\max}(\bar{t}) = h_\varepsilon(\bar{t})$ .

On pose donc  $H_\varepsilon = h_\varepsilon - u_{\max}$ , ainsi  $H_\varepsilon(0) = \varepsilon$ ,  $H_\varepsilon > 0$  sur  $[0, \bar{t}[$  et  $H_\varepsilon(\bar{t}) = 0$ . Et on a pour  $t \in [0, \bar{t}[$ ,  $H_\varepsilon(t) > 0$  et,

$$H'_\varepsilon(t) \geq b(h_\varepsilon(t)) - b(u_{\max}(t)) \geq -C(h_\varepsilon(t) - u_{\max}(t)) = -CH_\varepsilon(t),$$

ainsi en intégrant,  $H_\varepsilon(t) \geq H_\varepsilon(0) e^{-Ct} = \varepsilon e^{-Ct}$ .

On fait tendre  $t$  vers  $\bar{t}$  et on obtient :

$$H_\varepsilon(\bar{t}) \geq \varepsilon e^{-C\bar{t}} > 0,$$

ce qui est absurde. Donc,

$$\forall t \in [0, T' - \delta], \quad u_{\max}(t) \leq h_\varepsilon(t),$$

Par convergence uniforme de  $h_\varepsilon$  vers  $h$ , on obtient que,

$$\forall t \in [0, T' - \delta], \quad u_{\max}(t) \leq h(t),$$

comme  $\delta > 0$ , est arbitraire on le résultat voulu. □

Dans beaucoup de cas nous aurons simplement besoin du premier point du théorème c'est à dire de "l'Hamilton trick" mais à quelque reprise le résultat entier nous sera utile. Celui va nous permettre d'étudier globalement ce qu'il se passe pour la sous-variété  $\varphi_t(M)$  au cours du flot, nous allons montrer deux résultats important le principe de comparaison et le faite qu'un plongement reste un plongement au cours du flot.

### **Théorème 2.3.2.** *Principe de comparaison*

Soient  $M_1$  et  $M_2$  des variétés compactes de dimension  $n$ ,  $\varphi: M_1 \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  et  $\Psi: M_2 \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  des flots de la courbure moyenne respectifs.

Alors la distance entre  $\varphi_t(M_1)$  et  $\Psi_t(M_2)$  ne peut pas décroître, où la distance est donnée par :

$$d_\Psi^\varphi(t) = \inf_{p \in M_1, q \in M_2} \|\varphi(p, t) - \Psi(q, t)\|.$$

*Démonstration.* On pose  $M = M_1 \times M_2$  qui est compacte par hypothèses, de plus on pose :

$$\begin{aligned} u: M \times [0, T[ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (p, q, t) &\longmapsto \|\varphi(p, t) - \Psi(q, t)\|^2 . \end{aligned}$$

Ainsi  $u_{\min}(t) = (d_{\Psi}^{\varphi}(t))^2$ , ainsi il nous reste à montrer que  $u_{\min}$  ne peut pas décroître au cours du temps. Pour cela nous allons utiliser le lemme d'Hamilton (2.3.1), or  $M$  étant compacte et  $u \in C^{\infty}$ ,  $u$  vérifie les hypothèses du lemme. Ainsi  $u_{\min}$  est localement lipschitzienne et différentiable presque partout. Soit  $t_0 \in [0, T[$ , tel que  $u_{\min}$  soit différentiable en  $t_0$  et on note  $(p_0, q_0) \in M$  tel que  $u_{\min}(t_0) = u(p_0, q_0, t_0)$ , on sait alors que :

$$\frac{du_{\min}}{dt}(t_0) = \frac{\partial u}{\partial t}(p_0, q_0, t_0).$$

Il nous reste à montrer que  $\frac{\partial u}{\partial t}(p_0, q_0, t_0) \geq 0$ .

Si  $u(p_0, q_0, t_0) = 0$  alors si  $\frac{\partial u}{\partial t}(p_0, q_0, t_0) < 0$  donc  $u(p_0, q_0, t) < 0$  pour  $t$  proche de  $t_0$ , ce qui est absurde.

Si  $u(p_0, q_0, t_0) \neq 0$ , alors montrons que les plans tangents en  $\varphi_{t_0}(p_0)$  et  $\Psi_{t_0}(q_0)$  sont parallèles.

En effet  $u_1$ , définie comme :

$$\begin{aligned} u_1: M_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \|\varphi(p, t_0) - \Psi(q_0, t_0)\|^2 , \end{aligned}$$

atteint son minimum en  $p_0$  donc d'après le lemme sur les extremums sur une variété A.4.2, dans une carte autour de  $p_0$  :

$$\nabla u_1(p_0) = 0 \quad \text{donc} \quad \langle \nabla_i \varphi_{t_0}(p_0), \varphi(p_0, t_0) - \Psi(q_0, t_0) \rangle = 0$$

Or  $(\nabla_i \varphi_{t_0}(p_0))_{i \in [1; n]}$  étant une base de  $T_{\varphi_{t_0}(p_0)} \varphi_{t_0}(M_1)$ , on a exactement que :

$$\varphi(p_0, t_0) - \Psi(q_0, t_0) \perp T_{\varphi_{t_0}(p_0)} \varphi_{t_0}(M_1).$$

De même en considérant,

$$\begin{aligned} u_2: M_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \|\varphi(p_0, t_0) - \Psi(q, t_0)\|^2 , \end{aligned}$$

on obtient que  $\varphi(p_0, t_0) - \Psi(q_0, t_0) \perp T_{\Psi_{t_0}(q_0)} \Psi_{t_0}(M_2)$ , donc les plans tangents sont parallèles.

On peut donc définir  $(e_1, \dots, e_n)$  une base commune des plans tangents et grâce aux applications exponentielles on obtient des systèmes de coordonnées sur  $U$  un voisinage de  $p_0$  et  $V$  un voisinage de  $q_0$ .

Pour avoir une base de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , on pose :

$$e_{n+1} = \frac{\varphi(p_0, t_0) - \Psi(q_0, t_0)}{\|\varphi(p_0, t_0) - \Psi(q_0, t_0)\|}.$$

De plus comme  $(\varphi(p_0, t_0) - \Psi(q_0, t_0)) \perp T_{\Psi_{t_0}(q_0)} \Psi_{t_0}(M_2)$  et  $\varphi(p_0, t_0) - \Psi(q_0, t_0) \perp T_{\varphi_{t_0}(p_0)} \varphi_{t_0}(M_1)$ ,  $v^{\varphi}(p_0, t_0)$  et  $v^{\Psi}(q_0, t_0)$  sont colinéaires à  $e_{n+1}$ .

On a vu dans la preuve du théorème d'existence et unicité du flot 2.1.1 que dans un voisinage de  $t_0$  on peut écrire  $\varphi$  (respectivement  $\Psi$ ) comme un graphe au dessus de  $M_1$  (respectivement  $M_2$ ) selon son vecteur normal  $v^{\varphi}(p, t_0)$  (respectivement  $v^{\Psi}(q, t_0)$ ).

Ainsi en se plaçant dans les coordonnées données par  $(e_1, \dots, e_n)$  dans  $U$  (resp.  $V$ ), on peut écrire  $\varphi$  (resp.  $\Psi$ ) comme le graphe d'une fonction  $f$  (resp.  $g$ ). En particulier dans la base  $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ , pour  $t$  dans un voisinage de  $t_0$  on a :

$$\begin{aligned} \varphi(p_0, t) &= (0, \dots, 0, f(p_0, t)) \\ \Psi(q_0, t) &= (0, \dots, 0, g(q_0, t)) \end{aligned}$$

Or comme on l'a déjà vu dans un exemple (C.1), on a alors pour la courbure moyenne en  $(p_0, t_0)$  et  $(q_0, t_0)$  :

$$H^\varphi(p_0, t_0) = \frac{\Delta f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} - \frac{\text{Hess } f(\nabla f, \nabla f)}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}^3},$$

$$H^\Psi(p_0, t_0) = \frac{\Delta g}{\sqrt{1 + \|\nabla g\|^2}} - \frac{\text{Hess } g(\nabla g, \nabla g)}{\sqrt{1 + \|\nabla g\|^2}^3}.$$

De même pour le vecteur normal dans la base  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  on a en  $(p_0, t_0)$  et  $(q_0, t_0)$  :

$$v^\varphi(p_0, t_0) = -\frac{(\nabla f, -1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}},$$

$$v^\Psi(q_0, t_0) = -\frac{(\nabla g, -1)}{\sqrt{1 + \|\nabla g\|^2}}.$$

Quitte à intervertir  $f$  et  $g$  on peut supposer  $f(p_0, t_0) - g(q_0, t_0) > 0$ . Ainsi,

$$d: U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(p, q) \longmapsto f(p, t_0) - g(q, t_0) \quad ,$$

atteint son minimum en  $(p_0, q_0)$  donc  $\Delta f(p_0, t_0) - \Delta g(q_0, t_0) \geq 0$  et  $\nabla f(p_0, t_0) = \nabla g(q_0, t_0) = 0$  (en fixant  $p_0$  ou  $q_0$ ) d'après le lemme (A.4.2).

Ainsi on obtient,

$$H^\varphi(p_0, t_0) = \Delta f(p_0, t_0) \qquad v^\varphi(p_0, t_0) = e_{n+1}$$

$$H^\Psi(p_0, t_0) = \Delta g(p_0, t_0) \qquad v^\Psi(p_0, t_0) = e_{n+1}$$

donc,

$$\langle H^\varphi v^\varphi - H^\Psi v^\Psi, e_{n+1} \rangle = \Delta f(p_0, t_0) - \Delta g(q_0, t_0) \geq 0$$

On calcule maintenant  $\frac{\partial u}{\partial t}(p_0, q_0, t)$ , en utilisant que  $\varphi$  et  $\Psi$  sont des flots de la courbure moyenne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(p_0, q_0, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi(p_0, t) - \Psi(q_0, t), \varphi(p_0, t) - \Psi(q_0, t) \rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p_0) - \frac{\partial \Psi}{\partial t}(q_0), \varphi(p_0, t_0) - \Psi(q_0, t_0) \right\rangle \\ &= 2 \langle H^\varphi v^\varphi - H^\Psi v^\Psi, e_{n+1} \rangle \|\varphi(p_0, t_0) - \Psi(q_0, t_0)\| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

donc  $\frac{du_{\min}}{dt}(t_0) \geq 0$ , la distance ne décroît pas. □

**Remarque 2.3.1.** *On peut appauvrir les hypothèses, il n'est pas nécessaire de supposer  $M_1$  et  $M_2$  compact. On peut supposer seulement que  $M_1$  soit compact,  $M_2$  complet pour la distance induite par la métrique et  $\Psi$  soit propre (i.e. pour tout  $K$  compacte  $\Psi(K)$  est compacte). Dans la preuve, il faut s'assurer que  $u_{\min}$  vérifie bien les hypothèses du lemme d'Hamilton, ce point est détaillé dans le papier de Francisco Martin et Jesus Perez [4]. Par contre on ne peut pas affaiblir plus les hypothèses. Si on considère  $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  le plongement canonique de la sphère unité et  $\Psi: M_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface minimal complète à l'intérieur de la boule. Comme on la vue 2.2.3  $\varphi$  se contracte en un point alors que  $\Psi$  ne bouge pas (car  $H = 0$  pour une surface minimale). Pour plus de détails on peut se référer à [4] et [5].*

Cette proposition nous permet d'énoncer le corollaire important suivant.

**Corollaire 2.3.0.1.** *Soit  $\varphi: M_1 \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\Psi: M_2 \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  deux flots de la courbure moyenne alors si  $\varphi(M, 0)$  est strictement inclus dans l'intérieur défini par  $\Psi(M, 0)$ , alors pour tout  $t \in [0, T[$ ,  $\varphi(M, t)$  reste strictement inclus dans l'intérieur défini par  $\Psi(M, t)$ .*

Comme on considère que des variétés  $M$  compactes, on peut inclure  $\varphi_0(M)$  dans une boule de rayon assez grand. Or comme on la vue dans la sous-partie 2.2.3 la sphère à un un flot qui est défini sur un intervalle de temps fini, il est donc forcément de même pour toute variété compacte comme on va le voir avec ce deuxième corollaire.

**Corollaire 2.3.0.2.** Soit  $\varphi: M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  un flot de la courbure moyenne. Si  $\varphi_0(M) \subset \mathring{B}(x_0, R)$  alors pour tout  $t \in [0, T[$ ,  $\varphi_t(M) \subset \mathring{B}(x_0, \sqrt{R^2 - 2nt})$ .

En particulier tout flot d'une variété compacte développe une singularité en temps fini et on a la majoration,

$$T_{\max} \leq \frac{(\text{diam}_{\mathbb{R}^{n+1}} M)^2}{2n}$$

*Démonstration.* Pour  $R > 0$  assez grand, on a  $\varphi_0(M) \subset B(x_0, R)$  et  $\text{dist}(\varphi_0(M), S^n(x_0, R)) > 0$ .

Or on sait d'après le sous-partie (2.2.3), que sous l'action du flot de la courbure moyenne l'évolution de la sphère au temps  $t$  est  $S^n(x_0, \sqrt{R^2 - 2nt})$ .

Et donc d'après le principe de comparaison comme  $\text{dist}(\varphi_0(M), S^n(x_0, R)) > 0$  on a pour tout  $t \in [0, T[$ ,  $\text{dist}(\varphi_t(M), S^n(x_0, \sqrt{R^2 - 2nt})) > 0$ . En particulier on en déduit que  $\varphi_t(M) \subset B(x_0, \sqrt{R^2 - 2nt})$ .

Ainsi on a la majoration suivante pour  $T_{\max}$ ,

$$T_{\max} \leq \frac{R^2}{2n}.$$

Or pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut appliquer ce raisonnement avec  $R = \text{diam}_{\mathbb{R}^{n+1}} M + \varepsilon$ , ce qui nous donne la majoration voulue pour  $T_{\max}$ .  $\square$

**Remarque 2.3.2.** Du au résultat précédent on peut penser que le flot arrête d'exister partout en même temps sur la variété mais cela est faux. En effet, ce n'est pas vrai si on prend pour  $M$  une variété qui a la forme d'un pois de musculation comme sur cette image provenant de [6].

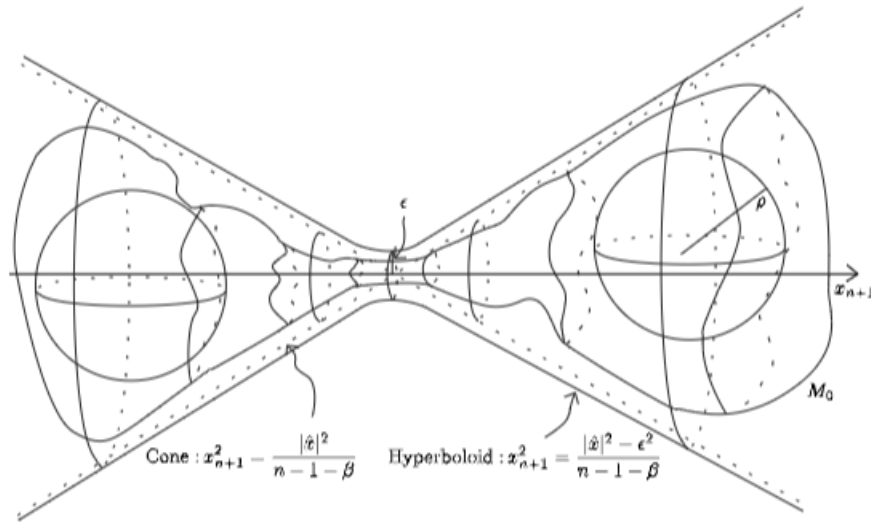


FIGURE 1 – Contre-exemple

Ainsi si les boules ont un rayon assez grand par rapport au centre celui va se contracter sur lui-même avant que les sphères se contractent en 1 point. Pour plus de détails on peut aller voir la proposition 3.7 dans le livre de Klaus Ecker [6] ou on peut aller voir l'article [7] Angenent, Sigurd B qui propose une autre preuve du même phénomène. Cela justifie la nécessité de comprendre où se forment les singularités et nous commencerons légèrement se travail dans la dernière sous-partie.

La dernière proposition que l'on va montrer c'est que si  $\varphi_0$  est un plongement alors au cours du temps  $\varphi_t$  reste un plongement.

**Proposition 2.3.1.** *Un plongement reste un plongement*

Soit  $\varphi: M \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  un flot de la courbure moyenne. Si  $\varphi_0$  est un plongement alors  $\varphi_t$  est un plongement pour tout  $t \in ]0, T[$ .

*Démonstration.* On pose :

$$\mathcal{A} = \{t \in ]0, T[ \mid \varphi_s \text{ est un plongement pour tout } s \in ]0, t]\}$$

On va montrer que  $\mathcal{A}$  est non vide, ouvert, fermé et par connexité on aura  $\mathcal{A} = ]0, T[$ .

$\mathcal{A}$  est non vide, en effet  $0 \in \mathcal{A}$ .

$\mathcal{A}$  est ouvert.

D'après le lemme (1.1.3) de la première partie, on sait que pour tout  $t \in \mathcal{A}$  fixé, il existe un voisinage  $V$  de  $t$  tel que pour tout  $s \in V$ ,  $\varphi_s$  soit un plongement, donc  $V \subset \mathcal{A}$ , ainsi  $\mathcal{A}$  est ouvert.

$\mathcal{A}$  est un fermé

Comme  $\mathcal{A}$  est non vide, ouvert, contenant 0 on sait qu'il est de la forme  $]0, t_0[$  où  $t_0 \in ]0, T[$ . Il nous suffit donc de montrer que  $t_0 = T$ , par l'absurde on suppose  $t_0 < T$ , et on pose :

$$W = \{(p, q) \in M \times M \mid \varphi(p, t_0) = \varphi(q, t_0) \text{ et } p \neq q\}.$$

Par hypothèse  $W$  est non vide et  $W \cap \Delta = \emptyset$  où  $\Delta = \{(p, p) \mid p \in M\}$ .

Montrons maintenant que  $W$  est fermé, soit  $(p, q) \in W$  et une suite  $(p_n, q_n) \in W$  tel que  $(p_n, q_n) \rightarrow (p, q)$ , par continuité de  $\varphi$  on a  $\varphi(p, t_0) = \varphi(q, t_0)$ . Il nous reste à montrer que  $p \neq q$ , par l'absurde supposons que  $p = q$ .

Soit  $(V, \Psi)$  une carte au voisinage de  $p \in M$  alors pour  $n$  assez grand  $p_n, q_n \in V$  donc on peut poser :

$$v_n = \frac{\Psi(p_n) - \Psi(q_n)}{\|\Psi(p_n) - \Psi(q_n)\|} \in S^n$$

Ainsi quitte à considérer une sous-suite que l'on continue de noter  $v_n$ , il existe  $v \in S^n$  tel que  $v_n \rightarrow v$ , alors :

$$d_{\Psi(p)}(\varphi_{t_0} \circ \Psi^{-1})(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(p_n, t_0) - \varphi(q_n, t_0)}{\|\Psi(p_n) - \Psi(q_n)\|} = 0$$

Or  $\varphi_{t_0}$  est une immersion donc  $d_{\Psi(p)}(\varphi_{t_0} \circ \Psi^{-1})$  est injective, on a donc une absurdité,  $p \neq q$ . On a donc montré que  $W$  est fermé donc compact car  $M \times M$  est compacte.

Comme  $W$  est fermé et  $W \cap \Delta = \emptyset$ , on peut donc trouver un ouvert  $\Omega$  tel que,

$$W \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset M \times M \setminus \Delta$$

En particulier  $\Omega$  est un ouvert contenant  $W$ , et  $\partial\Omega$  est compacte.

On va encore utiliser le principe du maximum, avec la fonction,

$$u: \Omega \times ]0, t_0[ \rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q, t) \mapsto \|\varphi(p, t) - \varphi(q, t)\|^2$$

qui est  $C^\infty$ . Maintenant montrons qu'elle vérifie les hypothèses du principe du maximum (2.3.1).

Pour  $(p, q, t) \in \partial\Omega \times ]0, t_0[$ ,  $\varphi_t$  est un plongement donc  $u(p, q, t) > 0$  de plus par continuité de  $\varphi$  on a :

$$u(p, q, t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} u(p, q, t_0).$$

Or  $(p, q) \notin W \cup \Delta$  donc  $u(p, q, t_0) > 0$ . Ainsi par compacité de  $\partial\Omega$ ,  $\Omega$  est un domaine régulier, il existe  $\sigma > 0$  tel que  $u > \sigma$  sur  $\partial\Omega \times ]0, t_0[$ .



Or pour tout  $(p, q) \in W$ ,  $u(p, q, t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} u(p, q, t_0) = 0$  ainsi comme  $\varphi$  est  $C^\infty$  et  $W$  compacte, il existe  $t_1 \in ]0, t_0[$  tel que :

$$\forall t \in ]t_1, t_0[, \quad \forall (p, q) \in W, \quad u(p, q, t) < \sigma.$$

Donc sur  $]t_1, t_0[$ ,  $u$  atteint son minimum dans  $W$  qui est compacte, on peut donc appliquer le principe du maximum à  $u: \Omega \times ]t_1, t_0[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ainsi  $u_{\min}: ]t_1, t_0[ \rightarrow \mathbb{R}$  est localement lipschitzienne, presque partout différentiable et pour presque tout  $t \in ]t_1, t_0[$ , on a :

$$\frac{du_{\min}}{dt}(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(p_0, q_0, t),$$

où  $(p_0, q_0)$  réalise le minimum, mais comme on l'a vu dans la preuve du principe de comparaison (2.3.2), on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(p_0, q_0, t) \geq 0.$$

Or pour  $t \in ]t_1, t_0[$ ,  $u_{\min}(t) > 0$  et  $u_{\min}(t_0) = 0$ , ce qui est absurde, ainsi on a bien  $t_0 = T$ . □

### 3 Flot de la courbure moyenne défini sur un intervalle de temps maximal

Dans cette partie l'objectif va être d'étudier le comportement de la seconde forme fondamentale lorsque le flot est défini sur son intervalle de temps maximal. Mais tout d'abord l'objectif va être de calculer les équations d'évolutions des différentes quantités géométriques.

#### 3.1 Equations d'évolution des quantités géométriques

Le but de cette partie va être de calculer les équations d'évolutions des différentes quantités géométriques. On commence par la première forme fondamentale.

**Lemme 3.1.1.** *Dans des coordonnées on a :*

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2Hh_{ij} \tag{3.1.1}$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial t} = 2Hh^{ij} \tag{3.1.2}$$

*Démonstration.* On commence par montrer 3.1.1, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x^j} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle - 2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle \end{aligned}$$

Or  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = Hv$  donc  $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right\rangle = H \left\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right\rangle = 0$ , ainsi :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2H \left\langle v, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle = -2Hh_{ij}.$$

Pour montrer 3.1.2, on utilise que :

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j,$$

donc

$$\partial_t g_{ik}g^{kj} + \partial_t g^{kj}g_{ik} = 0.$$

Ainsi

$$\partial_t g^{ij} = -g^{il} \partial_t g_{ls} g^{sj},$$

donc

$$\partial_t g^{ij} = 2H g^{il} h_{ls} g^{sj} = 2H h^{ij}.$$

□

On peut maintenant calculer l'équation d'évolution du vecteur normal.

**Lemme 3.1.2.** *Dérivée temporelle du vecteur normal :*

$$\partial_t \nu = -\nabla H \quad (3.1.3)$$

où  $\nabla H = g^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, on sait que :

$$\langle \partial_t \nu, \nu \rangle = \frac{1}{2} \partial_t (\langle \nu, \nu \rangle) = \frac{1}{2} \partial_t (1) = 0,$$

De plus comme  $(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x^n}, \nu)$  est une base de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , on peut écrire  $\partial_t \nu = f^j \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + f^\nu \nu$ , et on a :

$$\left\langle \partial_t \nu, \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right\rangle = g_{ij} f^j \quad \text{et} \quad \langle \partial_t \nu, \nu \rangle = f^\nu = 0.$$

donc,

$$\begin{aligned} f^j &= g^{ij} \left\langle \partial_t \nu, \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right\rangle \\ &= g^{ij} \left( \partial_t \left( \left\langle \nu, \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right\rangle \right) - \left\langle \nu, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x^i} \right\rangle \right) \\ &= -g^{ij} \left\langle \nu, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial t} \right\rangle, \end{aligned}$$

or

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial t} = \frac{\partial}{\partial x^i} (H \nu) = \frac{\partial H}{\partial x^i} \nu + H \underbrace{\frac{\partial \nu}{\partial x^i}}_{\perp \nu}.$$

d'où,

$$\partial_t \nu = -g^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = -\nabla H \quad \text{car} \quad \langle \nu, \nu \rangle = 1.$$

□

On calcule l'équation vérifiée par les symboles de Christoffel.

**Lemme 3.1.3.** *Equation d'évolution des symboles de Christoffel :*

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{jk}^i = -h_k^i \nabla_j H - h_j^i \nabla_k H + h_{jk} g^{il} \nabla_l H - H (\nabla_j h_k^i + \nabla_k h_j^i - g^{il} \nabla_l h_{jk}) \quad (3.1.4)$$

Soit avec la convention d'écriture d'Hamilton :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{jk}^i = \nabla H * A + H * \nabla A = \nabla A * A \quad (3.1.5)$$

*Démonstration.* On sait que :

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} g_{kl} + \frac{\partial}{\partial x^k} g_{jl} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{jk} \right),$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial}{\partial t} g_{kl} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} \right) - \frac{\partial}{\partial x^l} \left( \frac{\partial}{\partial t} g_{jk} \right) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} g^{il} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} g_{kl} + \frac{\partial}{\partial x^k} g_{jl} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{jk} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{il} (\nabla_j (\partial_t g)_{kl} + \nabla_k (\partial_t g)_{jl} - \nabla_l (\partial_t g)_{jk}) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{il} (\partial_t g_{kz} \Gamma_{jl}^z + \partial_t g_{zl} \Gamma_{jk}^z + \partial_t g_{jz} \Gamma_{kl}^z + \partial_t g_{lz} \Gamma_{jk}^z - \partial_t g_{jz} \Gamma_{kl}^z - \partial_t g_{kz} \Gamma_{jl}^z) \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{is} \partial_t g_{sz} g^{zl} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}) \end{aligned}$$

En effet  $\partial_t g^{il} = -g^{is} \partial_t g_{sz} g^{zl}$  et :

$$\nabla_j(\partial_t g)(\partial_k, \partial_l) = \frac{\partial}{\partial x^j}(\partial_t g_{kl}) - \partial_t g(\nabla_j \partial_k, \partial_l) - \partial_t g(\partial_k, \nabla_j \partial_l) = \frac{\partial}{\partial x^j}(\partial_t g_{kl}) - \Gamma_{jk}^z \partial_t g_{zl} - \Gamma_{jl}^z \partial_t g_{kz}$$

De plus on utilise le fait que  $g_{ml} \Gamma_{jk}^m = \partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}$  et en simplifiant les sommes on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{il} (\nabla_j(\partial_t g)_{kl} + \nabla_k(\partial_t g)_{jl} - \nabla_l(\partial_t g)_{jk}) + g^{il} \partial_t g_{zl} \Gamma_{jk}^z - g^{is} \partial_t g_{sz} g^{zl} g_{ml} \Gamma_{jk}^m \\ &= \frac{1}{2} g^{il} (\nabla_j(\partial_t g)_{kl} + \nabla_k(\partial_t g)_{jl} - \nabla_l(\partial_t g)_{jk}) + g^{il} \partial_t g_{zl} \Gamma_{jk}^z - g^{is} \partial_t g_{zs} \Gamma_{jk}^z \\ &= \frac{1}{2} g^{il} (\nabla_j(\partial_t g)_{kl} + \nabla_k(\partial_t g)_{jl} - \nabla_l(\partial_t g)_{jk}). \end{aligned}$$

Or on sait que  $\partial_t g = -2HA$ , donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{jk}^i &= -g^{il} (\nabla_j(HA)_{kl} + \nabla_k(HA)_{jl} - \nabla_l(HA)_{jk}) \\ &= -g^{il} h_{kl} \nabla_j H - g^{il} h_{jl} \nabla_k H + g^{il} h_{jk} \nabla_l H - g^{il} H \nabla_j h_{kl} - g^{il} H \nabla_k h_{jl} - g^{il} H \nabla_l h_{jk} \\ &= -h_k^i \nabla_j H - h_j^i \nabla_k H + h_{jk} g^{il} \nabla_l H - H (\nabla_j h_k^i + \nabla_k h_j^i - g^{il} \nabla_l h_{jk}) \\ &= \nabla H * A + H * \nabla A \\ &= \nabla A * A. \end{aligned}$$

□

On peut maintenant s'intéresser à la second forme fondamentale mais pour ça on rappelle l'identité de Simon que l'on a montrée dans la partie précédente (B.3.1).

**Théorème 3.1.1.** *Identité de Simon*

$$\Delta A = \nabla^2 H + HA^2 - |A|^2 A \quad (3.1.6)$$

$$\frac{1}{2} \Delta |A|^2 = g(A, \nabla^2 H) + |\nabla A|^2 + H \text{Trace}(A^3) - |A|^4 \quad (3.1.7)$$

On peut donc démontrer l'équation d'évolution vérifiée par  $A$ .

**Théorème 3.1.2.** *Dans des coordonnées :*

$$\partial_t h_{ij} = \Delta h_{ij} - 2Hh_{ij}^2 + |A| h_{ij} \quad (3.1.8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \Delta H + |A|^2 H \quad (3.1.9)$$

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial t} = \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4 \quad (3.1.10)$$

*Démonstration.* On commence par montrer l'équation vérifiée par  $A$  (3.1.8), pour ça on sait que dans des coordonnées :

$$\begin{aligned} \partial_t h_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \left\langle v, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle + \left\langle v, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t \partial x^i \partial x^j} \right\rangle \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t \partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (Hv),$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla H = -g^{ls} \frac{\partial H}{\partial x^l} \frac{\partial \varphi}{\partial x^s}.$$

Ainsi,

$$\partial_t h_{ij} = \left\langle -g^{ls} \frac{\partial H}{\partial x^l} \frac{\partial \varphi}{\partial x^s}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle + \left\langle v, \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (Hv) \right\rangle.$$

On calcule chaque terme de la somme séparément, pour le premier terme :

$$\begin{aligned} \left\langle -g^{ls} \frac{\partial H}{\partial x^l} \frac{\partial \varphi}{\partial x^s}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle &= -g^{ls} \frac{\partial H}{\partial x^l} \left\langle \nabla_{\partial_i \varphi}^{\mathbb{R}^{n+1}} \partial_j \varphi, \partial_s \varphi \right\rangle \\ &= -g^{ls} \frac{\partial H}{\partial x^l} \left\langle \nabla_{\partial_i \varphi}^M \partial_j \varphi, \partial_s \varphi \right\rangle - g^{ls} \frac{\partial H}{\partial x^l} \left\langle h_{ij} v, \partial_s \varphi \right\rangle \\ &= -g^{ls} \frac{\partial H}{\partial x^l} \Gamma_{ij}^k \left\langle \partial_k \varphi, \partial_s \varphi \right\rangle \\ &= -g^{ls} g_{ks} \frac{\partial H}{\partial x^r} \Gamma_{ij}^k \\ &= -\frac{\partial H}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k. \end{aligned}$$

Et pour le deuxième terme :

$$\begin{aligned} \left\langle v, \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (Hv) \right\rangle &= \left\langle v, \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial H}{\partial x^j} v + H \frac{\partial v}{\partial x^j} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle v, \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial H}{\partial x^j} v - H h_{jl} g^{lk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle v, \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j} v + \frac{\partial H}{\partial x^j} \frac{\partial v}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^i} (H g^{lk} h_{jl}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - H g^{lk} h_{jl} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} \right\rangle \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j} \langle v, v \rangle + \frac{\partial H}{\partial x^j} \left\langle v, \frac{\partial v}{\partial x^i} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial x^i} (H g^{lk} h_{jl}) \left\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right\rangle - H g^{lk} h_{jl} \left\langle v, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} \right\rangle \end{aligned}$$

En utilisant notamment que  $\left\langle v, \frac{\partial v}{\partial x^i} \right\rangle = 0$ ,  $\left\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right\rangle = 0$  et  $\left\langle v, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} \right\rangle = h_{ik}$ , on obtient :

$$\left\langle v, \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (Hv) \right\rangle = \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j} - H g^{lk} h_{jl} h_{ik}.$$

Et en additionnant les deux termes on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t h_{ij} &= \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial H}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k - H g^{lk} h_{jl} h_{ik} \\ &= \nabla_{ij}^2 H - H h_{ik} g^{kl} h_{lj} \\ &= \nabla_{ij}^2 H - H h_{ij}^2 \end{aligned}$$

Or l'identité de Simon (3.1.6) nous donne que  $\nabla_{ij}^2 H = \Delta h_{ij} - H h_{ij}^2 + |A|^2 h_{ij}$ , ainsi on a le résultat voulue :

$$\partial_t h_{ij} = \Delta h_{ij} - 2H h_{ij}^2 + |A|^2 h_{ij}$$

On prouve maintenant (3.1.9), l'équation vérifiée par  $H$ .

$$\begin{aligned} \partial_t H &= \frac{\partial}{\partial t} (g^{ij} h_{ij}) \\ &= \partial_t g^{ij} h_{ij} + g^{ij} \partial_t h_{ij} \end{aligned}$$

Or on a déjà montré que  $\partial_t g^{ij} = 2H h^{ij}$  et que :

$$\begin{aligned} \partial_t h_{ij} &= \nabla_{ij}^2 H - H h_{ij}^2 \\ &= \nabla_{ij}^2 H - g^{ij} h_{ij} h_{jl} g^{lk} h_{ki} \\ &= \nabla_{ij}^2 H - (g^{ij} g^{lk} h_{jl} h_{ki}) h_{ij} \\ &= \nabla_{ij}^2 H - |A|^2 h_{ij} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}\partial_t H &= 2Hh^{ij}h_{ij} + g^{ij}\nabla_{ij}^2 H - g^{ij}h_{ij}|A|^2 \\ &= \Delta H + H(2h^{ij}h_{ij} - |A|^2)\end{aligned}$$

Or  $|A|^2 = g^{ij}g^{kl}h_{jl}h_{ki} = h_i^l g^{ij}h_{jl} = h^{jl}h_{jl} = h^{ij}h_{ij}$ , d'où :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \Delta H + |A|^2 H$$

Il nous reste à montrer l'équation vérifiée par  $|A|^2$  (3.1.10).

Or on sait que  $|A|^2 = g^{ij}g^{kl}h_{ik}h_{jl}$  et on a déjà montré que :

$$\partial_t g^{ij} = 2Hh^{ij} \quad \text{et} \quad \partial_t h_{ij} = \nabla_{ij}^2 H - |A|^2 h_{ij}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial |h|^2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (g^{ij}g^{kl}h_{ik}h_{jl}) \\ &= \partial_t g^{ij}g^{kl}h_{ik}h_{jl} + g^{ij}\partial_t g^{kl}h_{ik}h_{jl} + g^{ij}g^{kl}\partial_t h_{ik}h_{jl} + g^{ij}g^{kl}h_{ik}\partial_t h_{jl} \\ &= 2Hh^{ij}g^{kl}h_{ik}h_{jl} + 2Hg^{ij}h^{kl}h_{ik}h_{jl} \\ &\quad + g^{ij}g^{kl}h_{jl}(\nabla_{ik}^2 H - |A|^2 h_{ik}) \\ &\quad + g^{ij}g^{kl}h_{ik}(\nabla_{jl}^2 H - |A|^2 h_{jl})\end{aligned}$$

Dans le deuxième terme on échange les indices en  $i \leftrightarrow k$  et  $j \leftrightarrow l$ , de même dans le quatrième terme on fait  $i \leftrightarrow j$  et  $k \leftrightarrow l$ . Ainsi par symétrie de  $g$  et  $h$ , on obtient :

$$\frac{\partial |h|^2}{\partial t} = 4Hh^{ij}g^{kl}h_{ik}h_{jl} + 2g^{ij}g^{kl}h_{jl}(\nabla_{ik}^2 H - |A|^2 h_{ik}) = 2Hh^{ij}g^{kl}h_{ik}h_{jl} + 2g^{ij}g^{kl}h_{jl}\nabla_{ik}^2 H$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer  $\text{Trace}(A^3)$ , en effet on a :

$$\begin{aligned}\text{Trace}(A^3) &= g^{il}h_{il}^3 \\ &= g^{il}h_{ik}g^{kl}h_{lj}g^{mj}h_{ml} \\ &= h^{ij}h_{ik}g^{kl}h_{lj},\end{aligned}$$

et par définition,

$$g(A, \nabla^2 H) = g^{ij}g^{kl}h_{jl}\nabla_{ik}^2 H.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial |h|^2}{\partial t} &= 2g(A, \nabla^2 H) + 2H\text{Trace}(A^3) \\ &= \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4,\end{aligned}$$

où pour la dernière égalité on a utilisé la seconde identité de Simon (3.1.7), ceci termine cette preuve.  $\square$

Maintenant ce qui nous intéresse c'est la variation temporelle de la dérivée covariante d'un tenseur, qui est donnée par le lemme suivant.

**Lemme 3.1.4.** Soit  $T$  un tenseur,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla T = \nabla \frac{\partial T}{\partial t} + T * A * \nabla A \quad (3.1.11)$$

*Démonstration.* Dans des coordonnées, on a :

$$T = T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_l}.$$

Ainsi, en développant  $\nabla_j T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_j T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \partial_j T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} - \sum_{s=1}^k T \left( \partial_{j_1}, \dots, \nabla_j \partial_{j_s}, \dots, \partial_{j_k}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_l} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=1}^l T \left( \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_k}, dx^{i_1}, \dots, \nabla_j dx^{i_s}, \dots, dx^{i_l} \right) \right]. \end{aligned}$$

Or par définition, on sait que :

$$\begin{aligned} \cdot \nabla_j \partial_{j_s} &= \Gamma_{j j_s}^m \partial_m, \\ \cdot \nabla_j dx^{i_1} &= -\Gamma_{j m}^{i_1} dx^m, \end{aligned}$$

Ce qui nous donne,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_j T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \partial_j T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} - \sum_{s=1}^k \Gamma_{j j_s}^m T_{j_1 \dots m \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} + \sum_{s=1}^l \Gamma_{j m}^{i_s} T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots m \dots i_l} \right] \\ &= \partial_j \partial_t T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} - \sum_{s=1}^k \partial_t \Gamma_{j j_s}^m T_{j_1 \dots m \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} + \sum_{s=1}^l \partial_t \Gamma_{j m}^{i_s} T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots m \dots i_l} \\ &\quad - \sum_{s=1}^k \Gamma_{j j_s}^m \partial_t T_{j_1 \dots m \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} + \sum_{s=1}^l \Gamma_{j m}^{i_s} \partial_t T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots m \dots i_l} \\ &= \nabla_j \partial_t T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} - \sum_{s=1}^k (A * \nabla A)_{j j_s}^m T_{j_1 \dots m \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} + \sum_{s=1}^l (A * \nabla A)_{j m}^{i_s} T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots m \dots i_l}. \end{aligned}$$

Où, dans la dernière égalité, on utilise la relation 3.1.5 pour la dérivée temporelle des symboles de Christoffel, ainsi on obtient bien :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla T = \nabla \frac{\partial T}{\partial t} + T * A * \nabla A$$

□

On peut maintenant s'intéresser à l'évolution de la dérivée covariante  $k$ -ième de la seconde forme fondamentale.

**Lemme 3.1.5.** Pour  $k \geq 0$ , en notant  $\nabla^k$  la  $k$ -ième dérivée covariante on a,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^k A = \Delta \nabla^k A + \sum_{p+q+r=k} \nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A \quad (3.1.12)$$

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $k \geq 0$ , pour  $k = 0$ , on a déjà montré (3.1.8) que :

$$\partial_t h_{ij} = \Delta h_{ij} - 2Hh_{ij}^2 + |A|h_{ij}$$

Or  $h_{ij}^2 = h_{ik}g^{kl}h_{lj} = A * A$  et  $|A| = g^{ij}g^{kl}h_{ik}h_{jl} = A * A$ , d'où :

$$\partial_t h_{ij} = \Delta h_{ij} + A * A * A$$

Pour  $k > 0$ , on suppose le résultat vrai pour  $k - 1$  et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^k A &= \nabla \frac{\partial}{\partial t} \nabla^{k-1} A + \nabla^{k-1} A * \nabla A * A && \text{d'après 3.1.11} \\ &= \nabla \left( \Delta \nabla^{k-1} A + \sum_{p+q+r=k-1} \nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A \right) + \nabla^{k-1} A * \nabla A * A \\ &= \nabla \Delta \nabla^{k-1} A + \sum_{p+q+r=k-1} \nabla (\nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A) + \nabla^{k-1} A * \nabla A * A \\ &= \nabla \Delta \nabla^{k-1} A + \sum_{p+q+r=k} \nabla^{p+1} A * \nabla^q A * \nabla^r A \end{aligned}$$

L'objectif est d'invertir  $\nabla$  et  $\Delta$ . Si on se place dans des coordonnées normales, on a pour un tenseur  $T$ , :

$$\begin{aligned}\Delta \nabla_k T &= \nabla_j \nabla_j \nabla_k T \\ &= \nabla_j \nabla_k \nabla_j T + \nabla_j (A * A * T) \\ &= \nabla_k \nabla_j \nabla_j T + A * A * \nabla T + \nabla A * A * T + A * \nabla A * T + A * A * \nabla T \\ &= \nabla_k \Delta T + A * A * \nabla T + \nabla A * A * T + A * \nabla A * T\end{aligned}$$

Ainsi pour  $T = \nabla^{k-1} A$ , on a :

$$\Delta \nabla^k A = \nabla \Delta \nabla^{k-1} A + A * A * \nabla^k A + \nabla A * A * \nabla^{k-1} A + A * \nabla A * \nabla^{k-1} A$$

Et on obtient bien le résultat voulu :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^k A = \Delta \nabla^k A + \sum_{p+q+r=k} \nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A$$

□

On peut donc démontrer la dernière équation qui portera elle sur la norme de la dérivée covariante  $k$ -ième de  $A$ .

**Lemme 3.1.6.** Pour  $k \geq 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^k A|^2 = \Delta |\nabla^k A|^2 - 2 |\nabla(\nabla^k A)|^2 + \sum_{p+q+r=k} \nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A * \nabla^k A \quad (3.1.13)$$

*Démonstration.* On sait déjà avec (3.1.1) et (3.1.2) que l'on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2Hh_{ij} = A * A \quad \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = 2Hh^{ij} = A * A \quad (3.1.14)$$

Ainsi pour un tenseur  $T = T = T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_k} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l}$ , on sait que :

$$|T|^2 = g(T, T) = g_{i_1 s_1} \dots g_{i_k s_k} g^{j_1 z_1} \dots g^{j_l z_l} T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} T_{z_1 \dots z_l}^{s_1 \dots s_k}$$

donc en utilisant (3.1.14),

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} |T|^2 &= 2g_{i_1 s_1} \dots g_{i_k s_k} g^{j_1 z_1} \dots g^{j_l z_l} \frac{\partial}{\partial t} \left( T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \right) T_{z_1 \dots z_l}^{s_1 \dots s_k} + A * A * T * T \\ &= 2g(T, \frac{\partial}{\partial t} T) + A * A * T * T.\end{aligned}$$

En particulier avec  $T = \nabla^k A$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^k A| = 2g(\nabla^k A, \frac{\partial}{\partial t} \nabla^k A) + A * A * \nabla^k A * \nabla^k A.$$

Maintenant on utilise le résultat précédent (3.1.12) pour  $\frac{\partial}{\partial t} \nabla^k A$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^k A| &= 2g \left( \nabla^k A, \Delta \nabla^k A + \sum_{p+q+r=k} \nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A \right) + A * A * \nabla^k A * \nabla^k A \\ &= 2g(\nabla^k A, \Delta \nabla^k A) + \sum_{p+q+r=k} \nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A * \nabla^k A.\end{aligned}$$

Or dans des coordonnées normales :

$$\begin{aligned}\nabla_{ii}^2 g(\nabla^k A, \nabla^k A) &= 2\nabla_i g(\nabla_i(\nabla^k A), \nabla^k A) \\ &= 2g(\nabla_i \nabla_i(\nabla^k A), \nabla^k A) + 2g(\nabla_i(\nabla^k A), \nabla_i(\nabla^k A)) \\ &= 2g(\nabla_{ii}^2(\nabla^k A), \nabla^k A) + g(\nabla_i(\nabla^k A), \nabla_i(\nabla^k A))\end{aligned}$$

donc

$$\Delta g(\nabla^k A, \nabla^k A) = 2g(\Delta \nabla^k A, \nabla^k A) + 2|\nabla(\nabla^k A)|^2.$$

On a ainsi le résultat voulu,

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^k A|^2 = \Delta |\nabla^k A|^2 - 2|\nabla(\nabla^k A)|^2 + \sum_{p+q+r=k} \nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A * \nabla^k A$$

□

### 3.2 Caractérisations des singularités

Maintenant l'objectif va être d'étudier ce qu'il se passe pour le flot lorsqu'il est défini sur un intervalle de temps maximal. Notamment comment se comporte la géométrie de  $\varphi_t(M)$  proche de  $T_{\max}$ .

Mais d'abord remarquons que d'après la sous-partie précédente on sait que  $|A|^2$ , vérifie l'équation dévolution suivante (3.1.10) :

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial t} = \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4.$$

Or on sait que  $|A|^2$  est une application  $C^\infty$  et,  $M$  étant compacte, elle vérifie les hypothèses du principe du maximum (2.3.1). Ainsi  $|A|_{\max}^2$  est localement lipschitzienne et différentiable pour presque tout  $t \in [0, T[$ ,

$$\frac{d|A|_{\max}^2}{dt} \leq 2|A_{\max}|^4.$$

Or  $|A|_{\max}^2$  est strictement positive sur  $[0, T[$ , car sinon il existe un temps  $t$  tel que  $A = 0$  ce qui est absurde d'après le lemme B.3.1. On a donc pour presque tout  $t \in [0, T[$ ,

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{|A|_{\max}^2} \right) \leq 2.$$

Ce qui nous donne pour  $(t, s) \in [0, T[$ ,

$$\frac{1}{|A(\cdot, t)|_{\max}^2} - \frac{1}{|A(\cdot, s)|_{\max}^2} \leq 2(s - t).$$

Ainsi si  $|A(\cdot, s)|_{\max}$  n'est pas borné pour  $s \rightarrow T$ , on obtient donc :

$$\frac{1}{|A(\cdot, t)|_{\max}^2} \leq 2(T - t).$$

On vient donc de démontrer la proposition suivante.

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $M$  une variété compacte de dimension  $n$  et  $\varphi : M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  un flot de la courbure moyenne, alors si  $|A|$  n'est pas borné pour  $s \rightarrow T$ , on a :*

$$\max_{p \in M} |A(p, t)| \geq \frac{1}{\sqrt{2(T-t)}}.$$

En particulier,

$$\lim_{t \rightarrow T} \max_{p \in M} |A(p, t)| = +\infty.$$

On considère maintenant un flot défini sur un intervalle de temps maximal, l'objectif va être de montrer que la seconde forme fondamentale ne reste pas bornée pour pouvoir appliquer la proposition. Le raisonnement se fera par l'absurde, et aura besoin de la proposition suivante.

**Proposition 3.2.2.** *On suppose  $A$  borné sur  $[0, T[$  avec  $T < +\infty$ , alors pour tout  $k \geq 0$ ,  $\nabla^k A$  est borné sur  $[0, T[$ .*



*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $k \geq 0$ , par hypothèses on sait déjà que  $A$  est borné. On fixe donc  $k \geq 0$  et on suppose que pour tout  $l < k$ ,  $\nabla^l A$  soit borné. Or on sait déjà par (3.1.13) que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left| \nabla^k A \right|^2 &= \Delta \left| \nabla^k A \right|^2 - 2 \left| \nabla(\nabla^k A) \right|^2 + \sum_{p+q+r=k} \nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A * \nabla^k A \\ &\leq \Delta \left| \nabla^k A \right|^2 + \sum_{p+q+r=k} \nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A * \nabla^k A \end{aligned}$$

L'objectif va être de montrer le fait suivant.

Fait : Il existe des polynômes  $P, Q$  indépendant du temps tels que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \nabla^k A \right|^2 \leq \Delta \left| \nabla^k A \right|^2 + P \left( |A|, \dots, \left| \nabla^{k-1} A \right| \right) \left| \nabla^k A \right|^2 + Q \left( |A|, \dots, \left| \nabla^{k-1} A \right| \right)$$

où on peut remarquer que  $\left| \nabla^k A \right|$  n'appartient pas aux arguments de  $P$  et  $Q$ .

En effet dans  $\nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A * \nabla^k A$ , comme  $p + q + r = k$  et  $p, q, r \in \mathbb{N}$ , on a deux cas.

Cas 1 :  $p = k$  ou  $q = k$  ou  $r = k$ , on a alors :

$$\left| A * A * \nabla^k A * \nabla^k A \right| \leq C_1 |A * A| \left| \nabla^k A \nabla^k A \right| \leq C_2 |A|^2 \left| \nabla^k A \right|^2.$$

Cas 2 :  $p < k$ ,  $q < k$  et  $r < k$  on a alors :

$$\begin{aligned} \left| \nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A * \nabla^k A \right| &\leq C'_1 \left| \nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A \right| \left| \nabla^k A \right| \\ &\leq \frac{C'_1}{2} \left| \nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A \right|^2 + \frac{C'_1}{2} \left| \nabla^k A \right|^2 \\ &\leq C'_2 \left| \nabla^p A \right|^2 \left| \nabla^q A \right|^2 \left| \nabla^r A \right|^2 + \frac{C'_1}{2} \left| \nabla^k A \right|^2 \end{aligned}$$

Où  $C_1, C_2, C'_1, C'_2 > 0$  sont des constantes qui ne dépendent que de la structure algébrique des tenseurs, donc indépendantes du temps. Ainsi, on a la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{p+q+r=k} \nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A * \nabla^k A &\leq \sum_{\substack{p+q+r=k \\ p < k, q < k, r < k}} \left| \nabla^p A * \nabla^q A * \nabla^r A * \nabla^k A \right| + 3 \left| A * A * \nabla^k A * \nabla^k A \right| \\ &\leq 3C_2 |A|^2 \left| \nabla^k A \right|^2 + \sum_{\substack{p+q+r=k \\ p < k, q < k, r < k}} \frac{C'_1}{2} \left| \nabla^k A \right|^2 + \sum_{\substack{p+q+r=k \\ p < k, q < k, r < k}} C'_2 \left| \nabla^p A \right|^2 \left| \nabla^q A \right|^2 \left| \nabla^r A \right|^2 \\ &\leq P \left( |A|, \dots, \left| \nabla^{k-1} A \right| \right) \left| \nabla^k A \right|^2 + Q \left( |A|, \dots, \left| \nabla^{k-1} A \right| \right) \end{aligned}$$

Où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes dont les coefficients ne dépendent que des constantes, on a donc ce qu'on voulait.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \nabla^k A \right|^2 \leq \Delta \left| \nabla^k A \right|^2 + P \left( |A|, \dots, \left| \nabla^{k-1} A \right| \right) \left| \nabla^k A \right|^2 + Q \left( |A|, \dots, \left| \nabla^{k-1} A \right| \right)$$

De plus, on suppose que pour tout  $l \in \llbracket 0 ; k-1 \rrbracket$ ,  $\left| \nabla_l A \right|$  est borné, ainsi on peut trouver des constantes  $C > 0$  et  $D > 0$  telles que :

$$\begin{aligned} P \left( |A|, \dots, \left| \nabla^{k-1} A \right| \right) &\leq C \\ Q \left( |A|, \dots, \left| \nabla^{k-1} A \right| \right) &\leq D \end{aligned}$$

Ainsi on a la majoration suivante,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \nabla^k A \right|^2 \leq \Delta \left| \nabla^k A \right|^2 + C \left| \nabla^k A \right|^2 + D$$

Or  $|\nabla^k A|^2$  est une application  $C^\infty$  et  $M$  étant compacte on peut appliquer le principe du maximum (2.3.2). Ainsi  $|\nabla^k A|_{\max}^2$  est localement lipschitzienne, différentiable presque partout, et on a la majoration suivante pour presque tout  $t \in [0, T[$  :

$$\frac{d}{dt} |\nabla^k A|_{\max}^2 \leq C |\nabla^k A|^2 + D.$$

Par continuité de  $|\nabla^k A|_{\max}^2$ , on a donc :

$$|\nabla^k A|_{\max}^2 \leq |\nabla^k A|_{\max}^2(0) + \int_0^t C |\nabla^k A|_{\max}^2(s) + D ds.$$

Ce qui nous donne par le lemme de Grönwall,

$$|\nabla^k A|_{\max}^2 \leq (|\nabla^k A|_{\max}^2(0) + DT) e^{CT} < +\infty \quad (T < +\infty).$$

Ainsi  $\nabla^k A$  est uniformément borné sur  $[0, T[$ . □

On peut donc s'attaquer au gros théorème de cette partie.

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $\varphi : M \times [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  un flot de la courbure moyenne défini sur un intervalle de temps maximal alors la seconde forme fondamentale n'est pas borné.*

*Démonstration.* Par l'absurde on suppose  $A$  borné sur  $[0, T[$ , ainsi grâce à la proposition précédente 3.2.2 pour tout  $k \geq 0$ ,  $\nabla_k A$  est borné sur  $[0, T[$  et  $H$  est borné.

*Dans la suite pour  $k \in \mathbb{N}$ , on notera  $\partial^k$  une dérivée partielle d'ordre de  $k$  sans préciser les variables de dérivation pour simplifier les notations. De la même manière pour  $\nabla^k T$  pour un tenseur, on considérera qu'il ne sera évalué que dans des éléments de la base i.e.  $(\partial_1, \dots, \partial_n)$*

L'objectif va être de montrer qu'on peut continuer le flot en  $T$ . Pour cela il nous faut montrer que la famille  $(\varphi_t)$  converge vers une immersion  $\varphi_T$  et que l'on pourra refaire partir un flot de la courbure moyenne grâce à  $\varphi_T$  puis recoller les deux flots en  $T$ .

On commence par étudier le comportement de la famille de métrique  $|\cdot|_{g(t)}$  sur  $TM$  qui est donnée par  $\varphi_t$ , ainsi pour  $v \in T_p M$  :

$$\left| \frac{d}{dt} \log |v|_{g(t)}^2 \right| = \frac{\left| \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} v^i v^j \right|}{|v|_{g(t)}^2} = \frac{|A * A * v * v|}{|v|_{g(t)}^2} \leq C_1 \frac{|A|_{g(t)}^2 |v|_{g(t)}^2}{|v|_{g(t)}^2} \leq C_2,$$

où on a utilisé le fait que  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = A * A$  donc que  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} v^i v^j = A * A * v * v$ , et que  $A$  est uniformément borné sur  $M \times [0, T[$  par hypothèses et donc  $C_2$  ne dépend ni de  $p$  ni de  $t$ .

On en déduit pour  $s, t \in [0, T[$ ,

$$\left| \log \frac{|v|_{g(t)}^2}{|v|_{g(s)}^2} \right| \leq \left| \int_s^t \frac{d}{du} \log |v|_{g(u)}^2 du \right| \leq C_2 |t - s|.$$

Ce qui nous donne,

$$e^{-C|t-s|} |v|_{g(s)}^2 \leq |v|_{g(t)}^2 \leq e^{C|t-s|} |v|_{g(s)}^2. \quad (3.2.1)$$

Ainsi les normes  $|\cdot|_{g(t)}$  et  $|\cdot|_{g(s)}$  sont équivalentes uniformément sur  $M$ .

De plus soit  $v \in T_p M$  et  $(s_n) \in [0, T[$  telle que  $s_n \rightarrow T$ , par (3.2.1),  $|v|_{g(s_n)}$  est une suite de Cauchy donc converge vers un réel noté  $|v|_T$ . Or pour  $t \in [0, T[$ , comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$e^{-C|t-s_n|} |v|_{g(s_n)}^2 \leq |v|_{g(t)}^2 \leq e^{C|t-s_n|} |v|_{g(s_n)}^2 \quad \text{et} \quad e^{-C|t-s_n|} |v|_{g(t)}^2 \leq |v|_{g(s_n)}^2 \leq e^{C|t-s_n|} |v|_{g(t)}^2.$$

Ce qui nous donne en faisant tendre  $n$  vers l'infini,

$$e^{-C|t-T|} |v|_T^2 \leq |v|_{g(t)}^2 \leq e^{C|t-T|} |v|_T^2 \quad \text{et} \quad e^{-C|t-T|} |v|_{g(t)}^2 \leq |v|_T^2 \leq e^{C|t-T|} |v|_{g(t)}^2.$$

Ainsi  $|\cdot|_T$  définit une norme équivalente uniformément sur  $M$  à  $|\cdot|_{g(t)}$ , de plus l'identité du parallélogramme,

$$2g(t)(v, u) = |u + v|_{g(t)}^2 - |u|_{g(t)}^2 - |v|_{g(t)}^2,$$

passé à la limite, la convergence de  $|\cdot|_{g(t)} \rightarrow |\cdot|_T$  étant uniforme sur  $TM$ .

Ainsi  $|\cdot|_T$  vient d'une métrique  $g_T$  qui est symétrique définie positive (par équivalence des normes) et est uniformément équivalente à  $|\cdot|_{g(t)}$ .

En particulier pour estimer la norme des tenseurs on peut utiliser la métrique que l'on veut car elles sont toutes uniformément équivalentes.

Maintenant on veut montrer que  $g_T$  provient d'une immersion  $C^\infty$ ,  $\varphi_T$ , et que  $\varphi_t \rightarrow \varphi_T$  pour la convergence  $C^\infty$ . Pour cela, on va devoir borner uniformément en  $t$ ,  $\varphi_t$  et ses dérivées spatiales, et pour cela il nous faut nous intéresser aux dérivées spatiales de la seconde forme fondamentale et de la métrique.

On se place dans des coordonnées et on commence par regarder l'évolution des symboles de Christoffel, en sachant que  $\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k = \nabla A * A$ , pour  $t \in [0, T[$  :

$$\begin{aligned} \left| \Gamma_{ij}^k(t) \right| &\leq \left| \Gamma_{ij}^k(0) \right| + \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k(u) \right| du \\ &\leq \left| \Gamma_{ij}^k(0) \right| + \int_0^t |\nabla A * A| du \\ &\leq C_3 + C_4 T \end{aligned}$$

où  $C_3, C_4$  sont des constantes ne dépendant que de  $\varphi_0$ . En particulier  $\Gamma_{ij}^k$  est borné uniformément en  $t$ .

Ainsi soit  $S$  un tenseur qui s'écrit dans les coordonnées  $S = S_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_k} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l}$ , on peut borner l'écart entre  $\partial_j S$  et  $\nabla_j S$  en effet :

$$\begin{aligned} \left| \nabla_j S - \partial_j S \right| &= \left| \sum_{s=1}^l \Gamma_{j j_s}^m S_{j_1 \dots m \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} - \sum_{s=1}^k \Gamma_{j m}^{i_s} S_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots m \dots i_k} \right| \\ &\leq C_5 |S| \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Ainsi pour tout tenseur  $S$  tel que  $S$  et  $\nabla S$  sont bornés uniformément sur  $[0, T[$  alors  $\partial S$  borné uniformément sur  $[0, T[$ .

L'objectif va être de montrer que cela se généralise pour les dérivées d'ordres supérieures. Il nous faut donc borner les dérivées spatiales des symboles de Christoffel.

On sait que  $\nabla^2 A$  est borné, or :

$$\nabla_{ij}^2 A = \nabla_i (\nabla_j (A)) - \Gamma_{ij}^k \nabla_m A$$

Or  $\nabla^2 A$  étant borné,  $\Gamma_{ij}^k$  borné et  $\nabla A$  borné, on en déduit que  $\nabla(\nabla(A))$  est borné, ainsi d'après (3.2.2),  $\partial(\nabla A)$  est borné, de même  $\partial A$  est borné et  $\partial g$  borné car  $\nabla g = 0$ . Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \left| \partial \Gamma_{ij}^k(t) \right| &\leq \left| \partial \Gamma_{ij}^k(0) \right| + \int_0^t |\partial(A * \nabla A)| du \\ &\leq \left| \partial \Gamma_{ij}^k(0) \right| + \int_0^t |\partial A * \nabla A| + |A * \partial g * \nabla A| + |A * \partial(\nabla A)| du \\ &\leq \left| \partial \Gamma_{ij}^k(0) \right| + C_1 \int_0^t |\partial A| |\nabla A| + |A| |\partial g| |\nabla A| + |A| |\partial(\nabla A)| du \\ &\leq C_2 \end{aligned} \tag{T < +\infty}$$

On peut maintenant s'attaquer à montrer le fait suivant par récurrence, où pour un tenseur  $S$  on note  $S_k = \underbrace{\nabla(\dots(\nabla S))}_{k \text{ fois}}$ .

Fait : Pour tout  $k \geq 0$ ,  $\partial^k \Gamma$  est borné et pour tout tenseur  $S$  tel que  $\nabla^i S$  soit borné pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , alors  $S_k$  et  $\partial^k S$  sont bornés.

On raisonne par récurrence forte sur  $k \in \mathbb{N}$ , et on commence par calculer l'écart entre  $\nabla^k S$  et  $\underbrace{\nabla(\dots(\nabla S))}_{k \text{ fois}} = S_k$  que l'on notera  $S_k$ . Dans les calculs, nous omettrons certains indices par souci de clarté. Ce qui nous intéresse c'est la forme du tenseur plus que son expression exacte. On sait déjà que d'après le lemme (A.3.4) où on a calculé  $\nabla^k S$  qu'en ne notant pas les indices sur les symboles de Christoffel

$$\nabla^k S = \nabla(\nabla^{k-1} S) - \sum_{j=1}^k \Gamma \nabla^{k-1} S$$

ce qui nous donne par récurrence,

$$\nabla^k S = \underbrace{\nabla(\dots(\nabla S))}_{k \text{ fois}} - \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{\nabla(\dots(\nabla)}_{i \text{ fois}} \left( \sum_{j=1}^k \Gamma \nabla^{k-1-i} S \right) = S_k - \sum_{i=0}^{k-1} \left( \sum_{j=1}^k \Gamma \nabla^{k-1-i} S \right)_i$$

Or par hypothèse de récurrence pour  $j < k$ , on sait que  $\partial^j \Gamma$  et  $(\nabla^{k-1-i} S)_j$  sont bornés. Et par hypothèses  $\nabla^k S$  borné donc  $S_k$  est borné.

Or d'après (3.2.2), on a :

$$|S_k - \partial(S_{k-1})| \leq CS_{k-1}$$

Mais on sait que,

$$\begin{aligned} \partial(S_{k-1}) &= \partial(\nabla(S_{k-2}) - \partial(S_{k-2})) + \partial^2(S_{k-2}) \\ &= \partial\left(\sum \Gamma^{m..}(S_{k-2}) \dots^{m..} - \sum \Gamma^{.m}(S_{k-2}) \dots^{m..}\right) + \partial^2(S_{k-2}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-2} \partial\left(\sum \Gamma^{m..}(S_{k-2-i}) \dots^{m..} - \sum \Gamma^{.m}(S_{k-2-i}) \dots^{m..}\right) + \partial^k S \end{aligned}$$

Par hypothèses de récurrence,  $|S_{k-1}| \leq D_1$ , on a :

$$\left| S_k - \sum_{i=0}^{k-2} \partial\left(\sum \Gamma^{m..}(S_{k-2-i}) \dots^{m..} - \sum \Gamma^{.m}(S_{k-2-i}) \dots^{m..}\right) - \partial^k S \right| \leq D_2$$

Les termes sont tous bornés en effet :

- .  $S_k$  borné,
- .  $\partial(S_{k-2-i})$  borné car  $S_{k-2-i}$  est borné et  $\nabla(S_{k-2-i}) = S_{k-1-i}$  est borné par hypothèses de récurrence,
- .  $\partial \Gamma$  est borné,

Ainsi  $\partial^k S$  est borné.

On peut appliquer ce résultat à  $A$ ,  $g$  et  $\nabla A$  ainsi  $\partial^k A$ ,  $\partial^k g$  et  $\partial^k \nabla A$  sont bornés et par hypothèses de récurrence si  $i < k$ , on sait déjà que  $\partial^i A$ ,  $\partial^i g$  et  $\partial^i \nabla A$  son bornés. On peut donc en déduire que :

$$\begin{aligned} \left| \partial^k \Gamma_{ij}^k(t) \right| &\leq \left| \partial^k \Gamma_{ij}^k(0) \right| + \int_0^T \left| \partial^k (A * \nabla A) \right| du \\ &\leq \left| \partial^k \Gamma_{ij}^k(0) \right| + \int_0^T \sum_{p+q+r=k} \left| \partial^p A * \partial^q g * \partial^r (\nabla A) \right| du \\ &\leq D_3 \end{aligned}$$

Ainsi on a montré le résultat voulu.

Ce que l'on retient, c'est que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\partial^k A$  et  $\partial^k g$  sont uniformément bornés sur  $[0, T[$ .

On peut maintenant s'intéresser au comportement de  $\varphi_t$  pour  $t \rightarrow T$ .

Par compacité de  $M$ , on peut inclure  $\varphi_0(M)$  dans une boule de rayon donné  $R$ , et par le corollaire (2.3.0.1),

on sait que  $\varphi_t(M)$  reste dans  $B(0, R)$  on peut donc borner uniformément  $\varphi$  sur  $M \times [0, T[$ . De plus on sait que  $H$  est uniformément borné sur  $M \times [0, T[$  donc pour  $p \in M, s, t \in [0, T[$ ,

$$\begin{aligned} \|\varphi(p, t) - \varphi(p, s)\| &\leq \left| \int_s^t \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p, u) \right\| du \right| \\ &\leq \left| \int_s^t |H(p, u)| du \right| \\ &\leq C |t - s|, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

où  $C > 0$  est une constante ne dépendant ni de  $p$  ni de  $t$ .

Ainsi soit  $p \in M$  et  $(s_n) \in [0, T[$  telle que  $s_n \rightarrow T$ , alors la suite  $(\varphi(p, s_n))$  est de Cauchy, par (3.2.1) donc converge vers un vecteur noté  $\varphi_T(p)$ . Or la convergence étant uniforme en  $p$ ,  $\varphi_T$  est continue. De plus par passage à la limite dans (3.2.1), on a :

$$\|\varphi(p, t) - \varphi_T(p)\| \leq C |T - t|.$$

Ainsi  $\varphi_t \xrightarrow[t \rightarrow T]{} \varphi_T$  pour la norme  $C^\infty$ .

On va maintenant s'intéresser aux dérivées partielles spatiales de  $\varphi$  dans des coordonnées. Notons qu'on peut recouvrir  $M$  par un nombre fini de système de coordonnées car  $M$  est compacte.

Dans des coordonnées, pour la premières dérivées spatiales on a :

$$\|\partial_i \varphi_t\|^2 = \left| \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{g(t)}^2 \leq e^{CT} \left| \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{g(0)}^2 = e^{CT} \|\partial_i \varphi_0\|^2 \quad \text{par (3.2.1).}$$

Ainsi  $\partial_i \varphi$  est uniformément borné sur  $M \times [0, T[$ .

On rappelle qu'on a déjà montré que :

$$\partial^2 \varphi = \Gamma \partial \varphi + A v \quad \text{et} \quad \partial v = A * \partial \varphi.$$

On fixe  $k \leq 2$  et on va raisonner par récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \|\partial^k \varphi\| &= \|\partial^{k-2} (\Gamma \partial \varphi + A v)\| \\ &= \left\| \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \partial^{k-2-i} \Gamma \partial^{i+1} \varphi + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \partial^{k-2-i} A \partial^i v \right\| \end{aligned}$$

Or  $\|v\| = 1$ ,  $\partial^i v = \partial^{i-1} (A * \partial \varphi)$  et on sait déjà que l'on peut borner uniformément  $\partial^{k-2-i} \Gamma$  et  $\partial^{k-2-i} A$ . Ainsi on peut trouver des constantes  $C_1, C_2, C_3 > 0$  telles que :

$$\begin{aligned} \|\partial^k \varphi\| &\leq C_1 \sum_{i=0}^{k-2} \|\partial^{i+1} \varphi\| + C_2 \sum_{i=1}^{k-2} \|\partial^{i-1} (A * \partial \varphi)\| + c_3 \\ &\leq C_1 \sum_{i=1}^{k-1} \|\partial^i \varphi\| + C_2 \sum_{i=1}^{k-2} \left\| \sum_{p+q+r=i-1} \partial^p A * \partial^q g * \partial^{r+1} \varphi \right\| + c_3 \end{aligned}$$

Or  $\partial^p A$  et  $\partial^q g$  étant bornés, on peut trouver  $D_1 > 0$  une constante telle que  $\|\partial^p A * \partial^q g * \partial^{r+1} \varphi\| \leq D_1 \|\partial^{r+1} \varphi\|$ , ainsi :

$$\begin{aligned} \|\partial^k \varphi\| &\leq C_1 \sum_{i=1}^{k-1} \|\partial^i \varphi\| + C_4 \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{r=0}^{i-1} \|\partial^{r+1} \varphi\| + C_3 \\ &\leq C_5 \sum_{i=1}^{k-1} \|\partial^i \varphi\| + C_3 \end{aligned}$$

Ainsi par récurrence pour tout  $k$ ,  $\partial^k \varphi$  est uniformément borné sur  $M \times [0, T[$ .

On a de plus,

$$\|\partial_i \partial^k \varphi\| = \|\partial^k (H v)\| = \left\| \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \partial^{k-i} H \partial^i v \right\| \leq D.$$

où  $D > 0$  est une constante. En effet  $\partial^j A$  et  $\partial^j g$  étant bornés,  $\partial^{k-i} H$  est borné et comme  $\partial^j \varphi$  est borné pour tout  $j$ , en raisonnant comme précédemment on montre que  $\partial^i v$  est borné. Ce qui nous donne pour  $0 \leq t, s < T$  :

$$\left\| \partial^k \varphi(p, t) - \partial^k \varphi(p, s) \right\| \leq \left| \int_s^t \left\| \partial_t \partial^k \varphi(p, u) \right\| du \right| \leq D |t - s|. \quad (3.2.4)$$

Ainsi pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $l_1, \dots, l_k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$  fixé, en appliquant le même raisonnement que précédemment on peut trouver  $\varphi_{T, l_1, \dots, l_k}^k$  une fonction continue telle que :

$$\partial_{l_1, \dots, l_k}^k \varphi_t \xrightarrow{t \rightarrow T} \varphi_{T, l_1, \dots, l_k}^k \quad \text{pour la norme } \|\cdot\|_\infty$$

Ainsi on sait que  $\varphi_T$  est  $C^\infty$ , que  $\partial_{l_1, \dots, l_k}^k \varphi_T = \varphi_{T, l_1, \dots, l_k}^k$  et donc que  $\varphi_t \rightarrow \varphi_T$  pour la convergence  $C^\infty$ .

Pour faire repartir le flot, il nous reste à montrer que  $\varphi_T$  est une immersion et que la métrique  $g_T$  est donnée par  $\varphi_T$ . Soit  $p \in M$  et  $(x^1, \dots, x^n)$  des coordonnées, alors :

$$g_t(e_i, e_j) = \left\langle \frac{\partial \varphi_t}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi_t}{\partial x^j} \right\rangle \xrightarrow{t \rightarrow T} \left\langle \frac{\partial \varphi_T}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi_T}{\partial x^j} \right\rangle$$

Par unicité de la limite,

$$g_T(e_i, e_j) = \left\langle \frac{\partial \varphi_T}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi_T}{\partial x^j} \right\rangle$$

En particulier si  $v \in T_p M$  et  $v \neq 0$  alors,

$$\langle d_p \varphi_T(v), d_p \varphi_T(v) \rangle = g_T(v, v) > 0,$$

donc  $d_p \varphi_T$  est injectif ainsi  $\varphi_T$  est bien une immersion.

Par le théorème d'existence et d'unicité 2.1.1, on peut démarrer le flot avec pour condition initiale l'immersion  $\varphi_T$ , ainsi il existe  $\varepsilon > 0$  et  $\Psi : M \times [T, T + \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  l'unique flot de la courbure moyenne tel que  $\varphi_T = \Psi(\cdot, T)$ .

On peut étendre  $\varphi : M \times [0, T + \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  grâce à  $\Psi$  sur  $[T, T + \varepsilon[$ .

Il nous faut juste montrer que  $\varphi$  est  $C^\infty$  en  $T$ , on a déjà que  $\varphi_t \xrightarrow{t \rightarrow T} \varphi_T$  de manière  $C^\infty$  et donc les quantités géométriques sont continues en  $T$ . Or les dérivées temporelles de  $\varphi$  ne dépendent que des quantités géométriques, en effet :

$$\partial_t \varphi = H\nu,$$

Or on connaît les équations d'évolutions de  $g$ ,  $A$ ,  $H$ ,  $\nu$  et comme  $\varphi_t \xrightarrow{t \rightarrow T} \varphi_T$  de manière  $C^\infty$  les quantités géométriques et toute leurs dérivées sont continues en  $T$ . Donc les dérivées croisées de  $\varphi$  sont continues en  $T$ , ainsi  $\varphi$  est bien  $C^\infty$  en  $T$ . De plus  $\varphi$  vérifie clairement  $\partial_t \varphi = H\nu$ , on a donc un flot de la courbure moyenne défini sur un intervalle de temps plus grand ce qui contredit la maximalité de  $T$ .  $\square$

Ce théorème justifie que tout flot de la courbure moyenne d'une variété compacte possède une singularité de type I ou de type II, dont la définition est la suivante.

**Définition 3.2.1.** Soit  $T$  le temps maximal d'existence du flot, on a 2 cas.

Il existe une constante  $C > 1$  tel que

$$\forall t \in [0, T[, \quad \max_{p \in M} |A(p, t)| \leq \frac{C}{\sqrt{2(T-t)}},$$

alors le flot développe en  $T$  une singularité de type I.

Sinon

$$\limsup_{t \rightarrow T} \max_{p \in M} |A(p, t)| \sqrt{T-t} = +\infty,$$

alors le flot développe en  $T$  une singularité de type II.

Si on distingue ces deux types de singularité c'est que leurs études sont différentes, pour voir plus de résultat sur leur étude on peut se référer au livre de Carlo Montegazza [2] où il fait un tour d'horizons des résultats connu et celui de Klaus Ecker [6].

## Références

- [1] A. P. Victor Guillemin, Differential Topology. Prentice Hall, 1974.
- [2] C. Mantegazza, Lecture Notes on Mean Curvature Flow. Birkhäuser Basel, 2011.
- [3] G. Huisken and A. Polden, Geometric evolution equations for hypersurfaces, pp. 45–84. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [4] F. MARTIN and J. PEREZ, “An introduction to the mean curvature flow,” In XXIII International Fall Workshop on Geometry and Physics, 2014.
- [5] A. S.-H. . K. S. Francisco Martín, “On the topology of translating solitons of the mean curvature flow,” Calculus of Variations and Partial Differential Equations volume, vol. 54, 2015.
- [6] K. Ecker, Regularity Theory for Mean Curvature Flow. Birkhauser Boston, 2004.
- [7] S. B. Angenent, Shrinking Doughnuts, pp. 21–38. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1992.
- [8] A. Marchand, “Géométrie différentielle, cours de olivier druet à l’ens lyon.”
- [9] M. Troyanov, “Notes du cours d’introduction à la géométrie riemannienne à l’epfl.”
- [10] T. Frankel, Geometry and Topology. Cambridge University Press, 3 ed., 2011.
- [11] C. H. Ben Andrews, The Ricci Flow in Riemannian Geometry. Springer Berlin, Heidelberg, 2011.

Nous allons maintenant introduire les notions fondamentales de la géométrie riemannienne. Pour cela nous nous baserons sur les notes de cours de Olivier Druet [8], celle de Marc Troyanov [9]. On utilisera aussi le livre *The Geometry of Physics* de Theodore Frankel [10] et le deuxième chapitre du livre de Ben Andrews et Christopher Hopper sur le flot de Ricci [11].

## A Notion de géométrie riemannienne

Sauf mention contraire par la suite on considère une variété différentielle  $M$  qui est compacte. On sait que si on considère des coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  sur un ouvert  $U$  de  $M$  alors pour tout point  $p \in M$  le plan tangent est donné par

$$T_p M = \text{Vect} \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right).$$

De plus on suppose connue la notion de sous-variété, de champ de vecteurs et de 1-formes différentielle. En particulier par la suite on utilisera plusieurs fois que l'on peut considérer les champs de vecteurs comme des dérivations sur les fonctions  $C^\infty(M)$ .

### A.1 Champ de Tenseurs

On introduit maintenant la notion de champ de tenseurs qui nous sera très utile par la suite. On commence par rappeler la définition d'un champ de vecteurs sur  $M$  et de champ de 1-formes différentielle.

#### Définition A.1.1. Champ de vecteurs

Un champ de vecteurs est une application  $C^\infty$ ,  $X: M \rightarrow TM$  telle que :

$$\forall p \in M, \quad X(p) \in T_p M.$$

Et dans un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  on écrira  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Par la suite on notera l'ensemble des champs de vecteurs  $\Gamma(M)$ .

#### Définition A.1.2. 1-forme différentielle

Une 1-forme est une application  $C^\infty$ ,  $\omega: M \rightarrow T^*M$  telle que :

$$\forall p \in M, \quad \omega(p) \in T_p^* M$$

Et dans un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  on écrira  $\omega = \omega_j dx^j$ . Par la suite on notera l'ensemble des 1-formes  $\Gamma^*(M)$ .

On peut maintenant introduire la notion de champ de tenseurs.

#### Définition A.1.3. Champ de tenseurs

Un champ de tenseurs  $k$ -fois covariant et  $l$ -fois contravariant est une application

$$T: \underbrace{\Gamma(M) \times \dots \times \Gamma(M)}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{\Gamma^*(M) \times \dots \times \Gamma^*(M)}_{l \text{ fois}} \rightarrow C^\infty(M),$$

qui est  $C^\infty(M)$ -multilinéaire. On note  $\text{Tens}_k^l(M)$  le  $C^\infty(M)$ -module formé par ces tenseurs. Dans le cas où  $k = 0$  et  $l = 0$  on identifie  $\text{Tens}_0^0(M) = C^\infty(M)$ .

Par la suite nous désignerons souvent les champs de tenseurs par simplement le terme tenseur même si c'est un abus de langage.

D'après la définition lorsque qu'on évalue un tenseurs en des champs de vecteurs on obtient une fonction  $C^\infty$  que l'on peut évaluer en un point  $p$ . L'objectif de la proposition suivante est de montrer que la valeur de cette fonction en  $p$  ne dépend que de la valeur des champs de vecteurs et de 1-formes en  $p$ .



**Proposition A.1.1. Localisation des tenseurs**

Soient  $p \in M$ ,  $T \in \text{Tens}_k^l(M)$ ,  $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k \in \Gamma(M)$  et  $\omega_1, \dots, \omega_l, \psi_1, \dots, \psi_l \in \Gamma^*(M)$ . Supposons que  $X_i(p) = Y_i(p)$  pour  $1 \leq i \leq k$  et  $\omega_j(p) = \psi_j(p)$  pour  $1 \leq j \leq l$  on a alors

$$T(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p) = T(Y_1, \dots, Y_k, \psi_1, \dots, \psi_l)(p)$$

Pour la preuve on utilise le lemme suivant.

**Lemme A.1.1.** Soient  $p \in M$ ,  $T \in \text{Tens}_k^l(M)$ ,  $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(M)$  et  $\omega_1, \dots, \omega_l \in \Gamma^*(M)$ . Supposons qu'il existe  $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$  tel que  $X_i(p) = 0$  alors

$$T(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p) = 0.$$

De même si il existe  $j \in \llbracket 1 ; l \rrbracket$  tels que  $\omega_j(p) = 0$  alors

$$T(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p) = 0.$$

*Démonstration.* On s'intéresse d'abord au cas où il existe  $i \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$  tel que  $X_i(p) = 0$ . Dans l'autre cas la preuve est identique.

On suppose que  $i = 1$ , dans les autres cas la preuve est identique, et on note  $U$  un voisinage ouvert de  $p$  où on a un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ , ainsi sur  $U$  on peut noter  $X_1 = X_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Or comme  $X_1(p) = 0$  on a pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $X_1^i(p) = 0$ .

On introduit  $f \in C^\infty(M)$  tel que

- .  $\text{supp}(f) \subset U$ ,
- .  $f(p) = 1$ .

On peut ainsi introduire  $\tilde{X}^i = f X^i \in C^\infty(M)$  et  $\tilde{\partial} = f \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(M)$  et en particulier

$$f^2 X_1 = \tilde{X}^i \frac{\tilde{\partial}}{\partial x^i}.$$

Ainsi ce qui nous donne

$$\begin{aligned} T(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p) &= f^2(p) T(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p) \\ &= T(f^2 X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p) && \text{par } C^\infty(M)\text{-linéarité} \\ &= \tilde{X}^i(p) T\left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x^i}, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l\right)(p) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

On peut passer à la preuve de la proposition (A.1.1).

*Démonstration.* Il est clair par multilinéarité et le lemme (A.1.1) que l'on vient de montrer que

$$T(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p) = T(Y_1, X_2, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p).$$

On pose maintenant  $S \in \text{Tens}_{k-1}^l(M)$  définit comme

$$S(Z_2, \dots, Z_k, \chi_1, \dots, \chi_l) = T(Y_1, Z_2, \dots, Z_k, \chi_1, \dots, \chi_l).$$

Ainsi d'après le même lemme

$$S(X_2, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p) = S(Y_2, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p),$$

ce qui donne

$$T(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p) = T(Y_1, Y_2, X_3, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p).$$

Ainsi par récurrence et en utilisant aussi le lemme (A.1.1) pour les variables contravariante on obtient bien que

$$T(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p) = T(Y_1, \dots, Y_k, \psi_1, \dots, \psi_l)(p).$$

□

Une des conséquences de cette proposition c'est que l'on peut restreindre un tenseur à un ouvert  $U$  de  $M$  sur lequel on a un système de coordonnées et donc on introduit la notion de coefficients d'un tenseur.

**Définition A.1.4.** *Coefficients d'un tenseurs*

Soient  $T \in \text{Tens}_k^l(M)$  et  $U$  un ouvert de  $M$  où on a un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ , alors dans ce système de coordonnées on définit les coefficients de  $T$  dans ce système de coordonnées les applications  $C^\infty$  données par

$$T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} = T \left( \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_l} \right).$$

On peut aussi maintenant définir la localisation d'un tenseur en un point  $p$  de  $M$ .

**Définition A.1.5.** Soient  $T \in \text{Tens}_k^l(M)$  et  $p \in M$  on définit le localisé de  $T$  en  $p$ , l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$T_p: \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{T_p^* M \times \dots \times T_p^* M}_{l \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{R},$$

tel que pour  $X_1, \dots, X_k \in T_p M$  et  $\omega_1, \dots, \omega_l \in T_p^* M$ , on choisit des extensions  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k \in \Gamma(M)$  et  $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_l \in \Gamma^*(M)$  et on pose

$$T_p(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l) = T(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_l)(p).$$

La dernière proposition (A.1.1) nous assure de la bonne définition de  $T_p$ .

Une propriété importante, qui est une conséquence de la proposition de localisation des tenseurs, c'est que l'on peut canoniquement identifier  $\text{Tens}_1^0(M)$  et  $\text{Tens}_0^1(M)$  à  $\Gamma^*(M)$  et  $\Gamma(M)$ .

**Proposition A.1.2.** Il existe des isomorphismes canoniques de  $C^\infty(M)$ -modules

$$\Gamma^*(M) = \text{Tens}_1^0(M) \quad \text{et} \quad \Gamma(M) = \text{Tens}_0^1(M).$$

*Démonstration.* On montre d'abord  $\Gamma^*(M) = \text{Tens}_1^0(M)$ , en effet pour tout  $\omega \in \Gamma^*(M)$  on peut définir l'application linéaire  $\Gamma(M) \rightarrow C^\infty(M)$  par

$$(\omega(X))(p) = \omega_p(X_p).$$

Et la proposition (A.1.1) nous dit que réciproquement tout tenseur  $T \in \text{Tens}_1^0(M)$  définit un champ de 1-formes.

On montre la deuxième égalité  $\Gamma(M) = \text{Tens}_0^1(M)$ . Pour  $X \in \Gamma(M)$ , on définit le tenseur  $T_X \in \text{Tens}_0^1(M)$  par

$$T_X(\omega) = \omega(X).$$

Et inversement si  $T \in \text{Tens}_0^1(M)$ , on définit localement un champ de vecteurs par

$$X = T(dx^i) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

et il est clair que  $T_X = T$ . □

On peut généraliser le lemme suivant.

**Proposition A.1.3.** On a une identification naturelle entre les champs de tenseurs de type 1-fois contravariant et  $k$ -fois contravariant (i.e.  $\text{Tens}_k^1(M)$ ) et les applications  $C^\infty(M)$ -multilinéaires du type

$$\tilde{T}: \underbrace{\Gamma(M) \times \dots \times \Gamma(M)}_k \longrightarrow \Gamma(M).$$

*Démonstration.* Si  $\tilde{T}$  est une application  $C^\infty(M)$ -multilinéaire alors on pose le tenseur

$$\begin{aligned} T: \Gamma(M) \times \dots \times \Gamma(M) \times \Gamma^*(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X_1, \dots, X_k, \omega &\longmapsto \omega(\tilde{T}(X_1, \dots, X_k)) \end{aligned}$$

Et inversement si  $T \in \text{Tens}_k^1(M)$  est un tenseur pour tout  $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(M)$ ,  $T(X_1, \dots, X_k, \cdot) \in \text{Tens}_0^1(M) = \Gamma(M)$  par le lemme précédent. □

On introduit maintenant la notion de produit tensoriel.

**Définition A.1.6.** *Produit tensoriel*

Soient  $T \in \text{Tens}_k^l(M)$  et  $S \in \text{Tens}_{k'}^{l'}(M)$  on définit un nouveau champ de tenseurs  $T \otimes S \in \text{Tens}_{k+k'}^{l+l'}(M)$  par la formule

$$T \otimes S(X_1, \dots, X_{k+k'}, \omega_1, \dots, \omega_{l+l'}) = T(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l) S(X_{k+1}, \dots, X_{k'}, \omega_{l+1}, \dots, \omega_{l'}).$$

Cette opération est clairement  $C^\infty(M)$ -bilinéaire.

De manière générale on peut écrire tout les tenseurs sous cette forme, au moins localement grâce à la proposition suivante.

**Proposition A.1.4.** Soit  $T \in \text{Tens}_k^l(M)$  et  $U$  un ouvert de  $M$  où on a un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ , sur  $U$  on a

$$T = T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_l}},$$

où  $T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} = T\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_l}\right)$ .

*Démonstration.* On utilise simplement la  $C^\infty(M)$ -multilinéarité et le fait que  $\Gamma^*(M) = \text{Tens}_1^0(M)$  et  $\Gamma(M) = \text{Tens}_0^1(M)$ . □

Ainsi on considérera par la suite que

$$\text{Tens}_k^l(M) = \underbrace{\Gamma(M) \otimes \dots \otimes \Gamma(M)}_k \otimes \underbrace{\Gamma^*(M) \otimes \dots \otimes \Gamma^*(M)}_l.$$

Maintenant que l'on peut exprimer les champs de tenseurs dans un système de coordonnées et que les tenseurs ne dépendent pas d'un système de coordonnées, les coefficients vérifient des équations de changement de coordonnées données par le lemme suivant.

**Lemme A.1.2.** Soit  $(x^1, \dots, x^n)$  et  $(y^1, \dots, y^n)$  deux systèmes de coordonnées tel que un champ de tenseurs  $T \in \text{Tens}_k^l(M)$  s'écrit

$$T = T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_l}}$$

et

$$T = T_{s_1 \dots s_k}^{m_1 \dots m_l} dy^{s_1} \otimes \dots \otimes dy^{s_k} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{m_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{m_l}},$$

on a alors

$$T_{s_1 \dots s_k}^{m_1 \dots m_l} = T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{s_1}} \dots \frac{\partial x^{j_k}}{\partial y^{s_k}} \frac{\partial y^{m_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{m_l}}{\partial x^{i_l}}$$

*Démonstration.* On utilise la multilinéarité du produit tensoriel et les relations

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial y^s} dy^s \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^m}.$$

□

**Remarque A.1.1.** Pour définir un tenseur on peut aussi se donner une collection de fonction  $C^\infty$ ,  $T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l}$  dans chaque système de coordonnées qui vérifient les équations de changement de base. Cela nous définit globalement un champ de tenseurs.

## A.2 Métrique Riemannienne

La notion fondamentale est celle de métrique riemannienne, l'objectif est d'avoir une application qui nous donne pour tout point  $p$  un produit scalaire sur l'espace tangent en  $p$ .

### A.2.1 Métrique sur les champs de vecteurs

#### Définition A.2.1. Métrique riemannienne

Une métrique riemannienne  $g$  sur une variété  $M$  est un champ de tenseurs deux fois covariant, i.e.  $g \in \text{Tens}_2^0(M)$ , sur  $M$  tel que pour tout  $p \in M$ ,  $g_p$  est un produit scalaire sur  $T_p M$ . Le couple  $(M, g)$  est alors appelé une variété riemannienne.

**Remarque A.2.1.** Remarquons que :

- . Pour  $p \in M$ ,  $g_p$  est un produit scalaire sur  $T_p M$  et notera  $|\cdot|_g$  la norme associée.
- . Comme  $g$  est un tenseur si on considère un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  sur  $U \subset M$  alors les coefficients de  $g$  nous définissent des applications

$$\begin{aligned} g_{ij} : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto g_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right), \end{aligned}$$

qui sont  $C^\infty$ .

- . De plus la matrice définie pour  $p \in U$ , par  $(g_{ij}(p))_{1 \leq i, j \leq n}$  est symétrique, définie positive car  $g_p$  est un produit scalaire. En particulier elle est inversible et on note son inverse la matrice  $(g^{ij}(p))_{1 \leq i, j \leq n}$  dont les coefficients définissent un champ de tenseurs deux fois contravariant, i.e.  $g \in \text{Tens}_0^2(M)$ .

On peut maintenant donner quelques exemples de métriques sur des variétés connues.

**Exemple A.2.1.** On donne deux exemples :

- . Si on considère  $\mathbb{R}^n$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a  $T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$  on peut simplement prendre comme l'application qui en tout point nous donne le produit scalaire canonique.
- . Si on note  $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ , le demi-plan on peut prendre comme métrique l'application qui a tout point  $x \in H$  associe sur  $T_x H$  le produit scalaire donné par  $g_x = \frac{\langle \cdot, \cdot \rangle}{x_n}$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On a défini l'espace Hyperbolique.

Une autre définition possible est de munir la boule unité ouverte  $B(0, 1)$  de  $\mathbb{R}^n$  de la métrique  $g$  définie pour  $x \in B(0, 1)$  par

$$g_x = \frac{\langle \cdot, \cdot \rangle}{(1 - \|x\|^2)^2}.$$

Une autre possibilité pour définir une métrique sur une variété c'est d'utiliser un plongement ou simplement une immersion.

**Proposition A.2.1.** Soit  $(N, g)$  une variété riemannienne et  $f: M \rightarrow N$  une immersion. On définit une métrique  $f^*g$  sur  $M$ , par

$$\forall p \in M, \forall X, Y \in \Gamma(M, N), \quad f^*g_p(X, Y) = g_{f(p)}(d_p f(X), d_p f(Y)).$$

En particulier dans un systèmes de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  on a

$$f^*g_{ij} = g \left( \frac{\partial f}{\partial x^i}, \frac{\partial f}{\partial x^j} \right).$$

*Démonstration.* Il est claire que  $f^*g$  soit un tenseur 2 covariant, et comme pour tout  $p \in M$ ,  $d_p f$  est injective il est claire que  $f^*g_p$  est un produit scalaire.  $\square$

**Remarque A.2.2.** Il est assez facile de montrer que n'importe quelle variété possédant une partition de l'unité admet une métrique riemannienne. Pour montrer cela on utilise le théorème de Withney qui nous dit que l'on peut plonger toute variété différentiable dans un  $\mathbb{R}^N$  et on tire en arrière la métrique de  $\mathbb{R}^N$  grâce au plongement.

La métrique nous permet aussi de faire le lien entre les champs de vecteurs et les champs de 1-formes. En effet, sur un espace vectoriel un produit scalaire nous donne un isomorphisme entre l'espace et son dual, l'espace des 1-formes, et cela grâce au théorème de représentation de Riesz. Ici la métrique nous permet de faire pareil mais directement sur les champs de vecteurs et les champs de 1-formes. On dit que la métrique permet de faire monter/descendre les indices.

**Définition/Proposition A.2.1.** On introduit les applications linéaires suivantes qui sont inverses l'une de l'autre

$$\begin{aligned} \flat: \Gamma(M) &\longrightarrow \Gamma^*(M) \\ X &\longmapsto g(X, \cdot) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sharp: \Gamma^*(M) &\longrightarrow \Gamma(M) \\ \omega &\longmapsto X \quad \text{t.q.} \quad \omega(Y) = g(X, Y) \end{aligned}$$

De plus dans un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ , si on a  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $\omega = \omega_i dx^i$  alors

$$\flat(X) = g_{ij} X^j dx^i \quad \text{et} \quad \sharp(\omega) = g^{ij} \omega_j \frac{\partial}{\partial x^i}$$

*Démonstration.* Il nous faut montrer que pour toute 1-forme  $\omega$ , il existe un unique champ de vecteur  $X$  tel que pour tout  $Y \in \Gamma(M)$ , on a  $\omega(Y) = g(X, Y)$ .

Pour l'unicité soit  $\omega \in \Gamma^*(M)$ , et soit  $X$  un tel champ de vecteurs, on se place dans un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  on alors

$$\omega_j = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g\left(X, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = X^i g_{ij}.$$

Ainsi  $(g^{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  étant l'inverse de  $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  on a

$$X^i = g^{ij} \omega_j,$$

ce qui justifie l'unicité de  $X$ .

Pour l'existence on pose dans chaque système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ ,  $X = g^{ij} \omega_j \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Comme  $\omega$  et  $g$  vérifient les relations de changements de base,  $X$  aussi donc on a bien défini un champ de vecteurs sur tout  $M$ . Et par le calcul précédent on a bien pour tout  $Y \in \Gamma(M)$ ,  $\omega(Y) = g(X, Y)$ .  $\square$

**Remarque A.2.3.** Ces applications permettent notamment de passer d'un tenseur  $k$  fois covariant et  $l$  fois contravariant à un tenseur  $k+1$  fois covariant et  $l-1$  fois contravariant ou  $k-1$  fois covariant et  $l+1$  contravariant.

Concrètement soit  $T \in \text{Tens}_k^l(M)$  un champ de tenseurs pour faire monter le  $k$ -ième indice covariant on pose simplement

$$\begin{aligned} \tilde{T}: \Gamma(M) \times \dots \times \Gamma(M) \times \Gamma^*(M) \dots \times \Gamma^*(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X_1, \dots, X_{k-1}, \omega_1, \dots, \omega_l, \omega_{l+1} &\longmapsto T(X_1, \dots, X_{k-1}, \sharp(\omega_{l+1}), \omega_1, \dots, \omega_l) \end{aligned}$$

On a alors dans un système de coordonnées

$$\tilde{T}_{j_1 \dots j_{k-1}}^{i_1 \dots i_{l+1}} = g^{i_{l+1} m} T_{j_1 \dots j_{k-1} m}^{i_1 \dots i_l}$$

Et si on fait descendre le  $l$ -ième indice contravariant on définit

$$\begin{aligned} \tilde{T}: \Gamma(M) \times \dots \times \Gamma(M) \times \Gamma^*(M) \dots \times \Gamma^*(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \omega_1, \dots, \omega_{l-1} &\longmapsto T(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_{l-1}, \flat(X_{k+1})) \end{aligned}$$

ce qui donne dans un système de coordonnées

$$\tilde{T}_{j_1 \dots j_k j_{k+1}}^{i_1 \dots i_{l-1}} = g_{j_{k+1} m} T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_{l-1} m}$$

Si on fait monter les 2-indices au tenseur  $g$  on obtient une métrique sur  $\Gamma^*(M)$ , dont les coefficients sont simplement l'inverse matriciel des coefficients de  $g$ .

## A.2.2 Métrique sur les champs de tenseurs

**Définition A.2.2.** On définit une métrique sur  $\Gamma^*(M)$ , que l'on note aussi  $g$ , et que l'on définit comme

$$\begin{aligned} g: \Gamma^*(M) \times \Gamma^*(M) &\longrightarrow \mathbb{C}^\infty(M) \\ \omega, \chi &\longmapsto g(\sharp(\omega), \sharp(\chi)) \end{aligned} .$$

Dans un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ , si  $\omega = \omega_i dx^i$  et  $\chi = \chi_j dx^j$ , on a alors

$$g(\omega, \chi) = g^{ij} \omega_i \chi_j$$

Ainsi on peut généraliser la notion à l'espace des champs de tenseurs.

**Définition A.2.3.** Soit  $E_1, E_2$  deux espaces où on a des métriques  $g_1$  et  $g_2$ , on définit donc une métrique sur  $E_1 \otimes E_2$  par

$$\forall x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \in E_1, E_2, \quad g(x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2) = g_1(x_1, x_2) g_2(y_1, y_2).$$

Ainsi appliqué au cas de l'espace  $\text{Tens}_k^l(M)$  comme on a

$$\text{Tens}_k^l(M) = \underbrace{\Gamma(M) \otimes \dots \otimes \Gamma(M)}_{k \text{ fois}} \otimes \underbrace{\Gamma^*(M) \otimes \dots \otimes \Gamma^*(M)}_{l \text{ fois}},$$

Ceci nous définit une métrique sur  $\text{Tens}_k^l(M)$ , c'est à dire une application

$$\begin{aligned} g: \text{Tens}_k^l(M) \times \text{Tens}_k^l(M) &\longrightarrow \mathbb{C}^\infty \\ T, S &\longmapsto g(T, S) \end{aligned} .$$

Et on définit la norme d'un tenseur comme

$$|T| = \sqrt{g(T, T)}.$$

En particulier le lemme suivant nous permet de calculer  $g(T, S)$  dans un système de coordonnées.

**Lemme A.2.1.** Soit  $(x^1, \dots, x^n)$  un système de coordonnées, et  $T, S \in \text{Tens}_k^l(M)$  tel que

$$T = T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \quad \text{et} \quad S = S_{s_1 \dots s_k}^{z_1 \dots z_l} dx^{s_1} \otimes \dots \otimes dx^{s_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{z_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{z_l}},$$

on a alors

$$g(T, S) = g^{j_1 s_1} \dots g^{j_k s_k} g_{i_1 z_1} \dots g_{i_l z_l} T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} S_{s_1 \dots s_k}^{z_1 \dots z_l}.$$

*Démonstration.* On a simplement

$$\begin{aligned} g(T, S) &= T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} S_{s_1 \dots s_k}^{z_1 \dots z_l} g\left(dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_l}}, dx^{s_1} \otimes \dots \otimes dx^{s_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{z_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{z_l}}\right) \\ &= T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} S_{s_1 \dots s_k}^{z_1 \dots z_l} g(dx^{j_1}, dx^{s_1}) \dots g(dx^{j_k}, dx^{s_k}) g\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{z_1}}\right) \dots g\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_l}}, \frac{\partial}{\partial x^{z_l}}\right) \\ &= g^{j_1 s_1} \dots g^{j_k s_k} g_{i_1 z_1} \dots g_{i_l z_l} T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} S_{s_1 \dots s_k}^{z_1 \dots z_l} \end{aligned}$$

□

**Remarque A.2.4.** De manière générale on peut définir des nouveaux tenseurs en contractant certains tenseurs par rapport à certaines de leurs variables. C'est à dire que l'on prend la métrique entre  $T$  et  $S$  uniquement selon certaines variables en laissant les autres libres, on définit ainsi un nouveau tenseur. Par exemple si  $T, S \in \text{Tens}_2^0(M)$  on peut définir un nouveau tenseur qui aura pour coefficients

$$(T * S)_{ij} = T_{ik} g^{kl} S_{lj}.$$

De manière générale on utilisera la notation d'Hamilton, c'est à dire que l'on notera  $T * S$  pour un tenseur qui est la combinaison linéaire de contraction de certaines paires d'indices de  $T, S$  grâce à  $g$ . Une propriété intéressante de ce produit c'est que

$$|T * S| \leq C |T| |S|,$$

où  $C$  est une constante positive qui dépend uniquement de la structure algébrique de  $T * S$ .

La métrique nous définit aussi une forme volume sur  $M$ , liée à la métrique.

**Définition A.2.4.** On définit une forme volume sur  $M$ , qui dans un système coordonnées s'écrit comme

$$d\mu = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Où  $\sqrt{\det(g_{ij})}$  est le déterminant de la matrice dont les coefficients sont  $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

Cette définition vient simplement que l'on tire en arrière dans chaque système de coordonnées la forme volume de  $\mathbb{R}^n$ .

### A.3 Dérivée covariante

On sait que les champs de vecteurs sont des dérivations, ainsi si on a une fonction entre deux variétés, localement ses dérivées partielles sont des champs de vecteurs. Ainsi pour généraliser les dérivées secondes il nous faut pouvoir dériver un champ de vecteurs dans la direction d'un autre champs de vecteurs. Pour cela nous allons introduire la notion de dérivée covariante, qui nous permettra aussi de "dériver" un champ de tenseur selon un champ de vecteur. Cette notion est fondamentale car elle nous permet d'introduire l'équivalent du laplacien ou de la hessienne sur  $\mathbb{R}^n$  sur les variétés compactes et donc pouvoir faire de l'analyse. De plus elle nous permettra d'introduire les différentes notions de courbures.

#### A.3.1 Dérivée covariante d'un champ de vecteur

**Définition A.3.1.** Une dérivée covariante sur  $M$  et une application :

$$\begin{aligned} \nabla: \Gamma(M) \times \Gamma(M) &\longrightarrow \Gamma(M) \\ X, Y &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

qui vérifie :

1.  $\nabla$  est  $C^\infty(M)$ -linéaire en la première variable :

$$\forall X_1, X_2, Y \in \Gamma(M), \forall f_1, f_2 \in C^\infty(M), \quad \nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y.$$

2.  $\nabla$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire en la seconde variable :

$$\forall X, Y_1, Y_2 \in \Gamma(M), \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad \nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2$$

3.  $\nabla$  vérifie la règle de Leibniz suivante en la seconde variable :

$$\forall X, Y \in \Gamma(M), \forall f \in C^\infty(M), \quad \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$$

On commence par montrer une proposition importante qui nous dit que  $\nabla$  est un "opérateur local". C'est à dire que  $(\nabla_X Y)_p$  ne dépend que de la valeur de  $X$  et  $Y$  dans un voisinage de  $p$ .

**Proposition A.3.1.** Si  $X_1, X_2 \in \Gamma(M)$  coïncident sur un ouvert  $W \subset M$ , de même pour  $Y_1, Y_2 \in \Gamma(M)$ , alors

$$\nabla_{X_1} Y_1 = \nabla_{X_2} Y_2 \text{ sur } W$$

*Démonstration.* Soit  $p \in W$ , on pose  $f \in C^\infty(M)$  tel que  $\text{supp}(f) \subset W$  et  $f = 1$  dans un voisinage de  $p$ . On a tout d'abord

$$\nabla_{f X_1} (f Y_1) = f (X_1(f) Y_1 + f \nabla_{X_1} Y_1).$$

Or  $f = 1$  sur un voisinage de  $p$  et  $X_1$  est une dérivation donc  $f(p) = 1$  et  $X_1(f)(p) = 0$ , ce qui donne

$$(\nabla_{f X_1} (f Y_1))_p = (\nabla_{X_1} Y_1)_p,$$

et de même

$$(\nabla_{f X_2} (f Y_2))_p = (\nabla_{X_2} Y_2)_p.$$

Comme  $\text{supp}(f) \subset W$ , on a  $f X_1 = f X_2$  et  $f Y_1 = f Y_2$  donc

$$(\nabla_{X_1} Y_1)_p = (\nabla_{X_2} Y_2)_p.$$

□

Cette proposition nous permet de restreindre une dérivée covariante à un ouvert  $U$  de  $M$ . En particulier si sur  $U$  on a des coordonnées cela permettra d'exprimer la dérivée covariante en fonction des coordonnées.

**Corollaire A.3.1.1.** *Si  $\nabla$  est une dérivée covariante sur une variété  $M$  et  $U$  un ouvert de  $M$ , alors  $\nabla$  définit une dérivée covariante sur  $U$ .*

*Démonstration.* Pour  $p \in U$  et  $X, Y \in \Gamma(U)$ , on doit définir  $(\nabla_X Y)_p$ . On se donne une fonction  $f \in C^\infty(M)$  telle que  $f = 1$  dans un voisinage de  $p$  et on définit  $\bar{X}, \bar{Y} \in \Gamma(M)$  par

$$\bar{X}_q = \begin{cases} f(q)X_q & \text{si } q \in U, \\ 0 & \text{si } q \notin U \end{cases}$$

et de même pour  $\bar{Y}$ . Ainsi il est clair que  $\bar{X}, \bar{Y} \in \Gamma(M)$  et on peut poser

$$(\nabla_X Y)_p = \left( \nabla_{\bar{X}} \bar{Y} \right)_p.$$

D'après la proposition précédente cette définition ne dépend pas de  $f$  et il est clair que  $\nabla$  vérifie les hypothèses d'une dérivée covariante sur  $U$ .  $\square$

Ainsi si on considère un ouvert  $U$  sur lequel on a des coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ , comme  $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \in \Gamma(U)$  par le corollaire précédent on a donné un sens à  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$  sur  $U$ . Ceci nous permet de définir les symboles de Christoffel.

**Définition A.3.2.** *Symboles de Christoffel*

*Soit  $\nabla$  une dérivée covariante sur  $M$ ,  $U$  un ouvert de  $M$  sur lequel on a un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ . Alors on définit les symboles de Christoffel les  $n^3$  fonctions  $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$  tels que*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

*Ainsi ils dépendent de la dérivée covariante mais aussi du système de coordonnées.*

En particulier les symboles de Christoffel décrivent entièrement la dérivée covariante.

**Lemme A.3.1.** *Soit  $X, Y \in \Gamma(M)$  et  $(x^1, \dots, x^n)$  un système de coordonnées sur  $U$  un ouvert de  $M$ . Alors si on écrit sur  $U$ ,  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  on a sur  $U$*

$$\nabla_X Y = \left( X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

*En particulier  $(\nabla_X Y)_p$  ne dépend que de la valeur de  $X$  en  $p$  et celle de  $Y$  dans un voisinage de  $p$ .*

*Démonstration.* C'est juste un calcul :

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{a^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left( b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= a^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + a^i b^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + a^i b^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \left( a^i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} + a^i b^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

$\square$



**Remarque A.3.1.** Dans la suite pour alléger les notations nous noterons souvent

$$\nabla_i \partial_j = \nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Par la suite on va s'intéresser à une dérivée covariante particulière qui va être compatible avec la métrique.

**Définition/Théorème A.3.1.** *Dérivée covariante de Levi-Civita*

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne, il existe une unique dérivée covariante  $\nabla$  sur  $M$  telle que :

1.  $\nabla$  est symétrique (ou sans torsion), i.e. pour tout  $X, Y \in \Gamma(M)$

$$\nabla_Y X - \nabla_X Y = [Y, X],$$

2.  $\nabla$  est compatible avec la métrique, i.e. pour tout  $X, Y, Z \in \Gamma(M)$

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

**Remarque A.3.2.** Pour  $\nabla$  une dérivée covariante il est assez facile de voir qu'on a une équivalence entre :

1.  $\nabla$  est symétrique
2.  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}$  dans tout les systèmes de coordonnées
3.  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  dans tout les systèmes de coordonnées.

*Démonstration.* On commence par montrer l'unicité. Pour cela, il nous suffit de montrer que dans tout système de coordonnées les symboles de Christoffel sont entièrement déterminés par la métrique. Ainsi on fixe  $(x^1, \dots, x^n)$  un système de coordonnées défini sur un ouvert de  $M$ , d'après (2) on a

$$\begin{aligned} \partial_i g_{jk} &= g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) + g(\partial_j, \nabla_{\partial_i} \partial_k) \\ &= g(\Gamma_{ij}^m \partial_m, \partial_k) + g(\partial_j, \Gamma_{ik}^m \partial_m) \\ &= \Gamma_{ij}^m g_{mk} + \Gamma_{ik}^m g_{jm}. \end{aligned} \quad (a)$$

De même on a

$$\partial_j g_{ik} = \Gamma_{ji}^m g_{mk} + \Gamma_{jk}^m g_{im} \quad (b)$$

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki}^m g_{mj} + \Gamma_{kj}^m g_{im}. \quad (c)$$

Or on sait que  $g_{ij} = g_{ji}$  et  $\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ji}^m$  d'après (1) et la remarque précédente. Ainsi en faisant (a)+(b)-(c) on obtient

$$2g_{mk} \Gamma_{iji}^m = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij},$$

ainsi

$$2g_{mk} g^{kl} \Gamma_{iji}^m = g^{kl} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}),$$

or  $g_{mk} g^{kl} = \delta_m^l$  et  $g^{kl} = g^{lk}$  donc

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}), \quad (A.3.1)$$

d'où l'unicité.

Pour l'existence, on définit  $\nabla$  dans le domaine de chaque carte grâce à l'expression de  $\Gamma_{ij}^l$ , donnée par (A.3.1). On a clairement par symétrie de  $g$ ,  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  ce qui démontre que  $\nabla$  est sans torsion, de plus on a

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ij}^m g_{mk} + \Gamma_{ik}^m g_{jm},$$

ce qui démontre la compatibilité de  $\nabla$  avec la métrique. de plus l'unicité que nous venons nous de démontrer nous assure l'indépendance de  $\nabla$  par rapport au système de coordonnées.  $\square$

Dans la preuve nous avons démontré le lemme suivant qui nous sera utile plus tard.

**Lemme A.3.2.** *Symboles de Christoffel de la dérivée covariante de Levi-Civita.*

Soit  $\nabla$  la dérivée covariante de Levi-Civita de  $(M, g)$  alors dans un système de coordonnées

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$

**Par la suite on ne considérera que la dérivée covariante de Levi-Civita même si les différentes définitions marche pour n'importe quel dérivée covariante.**

### A.3.2 Dérivée covariante d'un champ de tenseur

L'objectif maintenant est de généraliser cette notion de dérivée covariante pour les 1-formes puis pour les tenseurs. Pour cela comme l'objectif de  $\nabla$  est d'être une dérivation de  $\omega$  dans la direction de  $X$ , on veut qu'elle respecte la règle de Leibniz c'est à dire

$$\forall X, Y \in \Gamma(M), \forall \omega \in \Gamma^*(M), \quad X(\omega(Y)) = \nabla_X \omega(Y) + \omega(\nabla_X Y).$$

On utilise cette formule pour définir une dérivée covariante sur  $\Gamma^*(M)$ .

**Définition A.3.3.** *Dérivée covariante sur les 1-formes*

On définit l'opérateur  $\nabla$  comme

$$\nabla: \begin{array}{ccc} \Gamma(M) \times \Gamma^*(M) & \longrightarrow & \Gamma^*(M) \\ X, \omega & \longmapsto & \nabla_X \omega \end{array},$$

tel que pour tout  $Y \in \Gamma(M)$

$$\nabla_X \omega(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$$

Tout d'abord on peut remarquer que  $\nabla$  vérifie sur  $\Gamma^*(M)$  les mêmes propriétés que la dérivée covariante sur  $\Gamma(M)$ .

**Proposition A.3.2.**  $\nabla$  vérifie :

1.  $\nabla$  est  $C^\infty(M)$ -linéaire en la première variable :

$$\forall \omega \in \Gamma^*(M), \forall X_1, X_2 \in \Gamma(M), \forall f_1, f_2 \in C^\infty(M), \quad \nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} \omega = f_1 \nabla_{X_1} \omega + f_2 \nabla_{X_2} \omega.$$

2.  $\nabla$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire en la seconde variable :

$$\forall \omega_1, \omega_2 \in \Gamma^*(M), \forall X \in \Gamma(M), \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad \nabla_X (a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2) = a_1 \nabla_X \omega_1 + a_2 \nabla_X \omega_2$$

3.  $\nabla$  vérifie la règle de Leibniz suivante en la seconde variable :

$$\forall \omega \in \Gamma^*(M), \forall X \in \Gamma(M), \forall f \in C^\infty(M), \quad \nabla_X (f\omega) = f \nabla_X \omega + X(f)\omega$$

*Démonstration.* La preuve est simplement calculatoire. □

Ainsi  $\nabla$  est un opérateur locale tout comme la dérivée covariante sur  $\Gamma(M)$ . On peut se demander si on a besoin de redéfinir des symboles de Christoffel, mais comme on va le voir avec les lemmes suivants on n'a pas besoin. La dérivée covariante sur  $\Gamma(M)$  définit entièrement celle sur  $\Gamma^*(M)$ .

**Lemme A.3.3.** Soit  $X \in \Gamma(M)$  et  $\omega \in \Gamma^*(M)$ , alors si dans un système de coordonnées  $\omega = \omega_i dx^i$  et  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  alors

$$\nabla_X \omega = \left( X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - X^i \Gamma_{ji}^k \omega_k \right) dx^j.$$

En particulier  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j = -\Gamma_{ik}^j dx^k$ .

*Démonstration.* Soit  $Y \in \Gamma(M)$  tel que  $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  on a

$$\begin{aligned} \nabla_X \omega(Y) &= X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) \\ &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (\omega_j Y^j) - \omega \left( \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + X^i Y^j \Gamma_{ik}^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} Y^j + X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \omega_j - \omega_j X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - \omega_j X^i Y^k \Gamma_{ik}^j \\ &= \left( X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \omega_k X^i \Gamma_{ij}^k \right) Y^j. \end{aligned}$$

On a donc bien  $\nabla_X \omega = \left( X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - X^i \Gamma_{ij}^k \omega_k \right) dx^j$ . □

Maintenant on peut généraliser la dérivée covariante à un tenseur en utilisant toujours la formule de Leibniz.

**Définition A.3.4.** *Dérivée covariante d'un tenseur*

Soit  $T \in \text{Tens}_l^k(M)$  et  $X \in \Gamma(M)$ , on définit le tenseur  $\nabla_X T \in \text{Tens}_k^l(M)$  grâce à la règle de Leibniz, i.e. pour  $Y_1, \dots, Y_k \in \Gamma(M)$  et  $\omega_1, \dots, \omega_l \in \Gamma^*(M)$

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)(Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l) &= X(T(Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k T(Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l) \\ &\quad - \sum_{j=1}^l T(Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \nabla_X \omega_j, \dots, \omega_l) \end{aligned}$$

Pour  $f \in \text{Tens}_0^0(M) = C^\infty(M)$  on définit naturellement

$$\begin{aligned} \nabla f: \Gamma(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X &\longmapsto \nabla_X f = X(f) \end{aligned}$$

Et comme la dérivée covariante sur les 1-formes de la même manière,  $\nabla$  vérifie aussi les propriétés de la proposition (A.3.2) mais pour les tenseurs. En particulier c'est aussi un opérateur local et il est entièrement défini par la dérivée covariante sur les champs de vecteurs.

**Remarque A.3.3.** *Définition alternative de la dérivée covariante sur  $\text{Tens}_k^l(M)$ .*

Comme on l'a vu on a

$$\text{Tens}_k^l(M) = \underbrace{\Gamma(M) \otimes \dots \otimes \Gamma(M)}_k \otimes \underbrace{\Gamma^*(M) \otimes \dots \otimes \Gamma^*(M)}_l.$$

Si on note  $\nabla$  la dérivée covariante sur  $\Gamma(M)$  et  $\nabla^*$  sur  $\Gamma^*(M)$  on peut définir une dérivée covariante sur  $\Gamma(M) \otimes \Gamma^*(M)$  par

$$\nabla(T \otimes S) = \nabla T \otimes \nabla^* S.$$

Or on peut voir, en utilisant un système de coordonnées, que ceci définit la même dérivée covariante que celle donnée par la définition précédente.

**Remarque A.3.4.** *Comme  $\nabla$  est  $C^\infty(M)$ -linéaire en la première variable si  $T \in \text{Tens}_k^l(M)$  alors*

$$\begin{aligned} \nabla T: \underbrace{\Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \dots \times \Gamma(M)}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{\Gamma^*(M) \times \dots \times \Gamma^*(M)}_{l \text{ fois}} &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l) &\longmapsto \nabla_X T(Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l) \end{aligned}$$

est un tenseur  $(k+1)$ -fois covariant et  $l$ -fois contravariant, ainsi  $\nabla T \in \text{Tens}_{k+1}^l(M)$ . Ainsi  $\nabla$  nous définit un opérateur dérivée covariante

$$\begin{aligned} \nabla: \text{Tens}_k^l(M) &\longrightarrow \text{Tens}_{k+1}^l(M) \\ T &\longmapsto \nabla T \end{aligned}$$

**Remarque A.3.5.** Pour donner un sens à la condition de compatibilité dans la définition de la dérivée covariante de Levi-Civita, on peut calculer  $\nabla_X g$  pour  $X \in \Gamma(M)$ , en effet  $g \in \text{Tens}_2^0(M)$  et on a

$$\forall Y, Z \in \Gamma(M), \quad \nabla_X g(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z).$$

En particulier si  $\nabla$  est la dérivée covariante de Levi-Civita, alors  $\nabla_X g = 0$ , donc  $\nabla g = 0$ .

Grâce à la remarque (A.3.4), on peut définir les dérivées covariantes d'ordre supérieure. En effet  $\nabla T$  est un tenseur on peut lui appliquer l'opérateur dérivée covariante et on peut continuer par récurrence.

**Définition A.3.5.** Soit  $T \in \text{Tens}_k^l(M)$  on définit  $\nabla^2 T$  le tenseur défini comme

$$\begin{aligned} \nabla^2 T: \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \cdots \times \Gamma(M) \times \Gamma^*(M) \times \cdots \times \Gamma^*(M) &\longrightarrow \mathbb{C}^\infty(M) \\ (X, Y, Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l) &\longmapsto (\nabla_X(\nabla T))(Y, Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l) \end{aligned}$$

Et l'on note

$$\nabla_{X,Y}^2 T(Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l) = \nabla^2 T(X, Y, Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l) = (\nabla_X(\nabla T))(Y, Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l).$$

Par récurrence on peut ainsi définir  $\nabla^i T \in \text{Tens}_{k+i}^l(M)$  en appliquant récursivement l'opérateur de dérivée covariante.

Pour simplifier les notations nous noterons souvent dans des coordonnées

$$\nabla_{i,j}^2 T = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}}^2 T$$

Il est important de voir qu'en générale  $\nabla_{X,Y}^2 T \neq \nabla_X(\nabla_Y T)$ , c'est une conclusion du lemme suivant.

**Lemme A.3.4.** Soit  $T \in \text{Tens}_k^l(M)$ ,  $X, Y \in \Gamma(M)$  alors on a

$$\nabla_{X,Y}^2 T = \nabla_X(\nabla_Y T) - \nabla_{\nabla_X Y} T.$$

Plus généralement on a

$$\nabla_{X_1, \dots, X_i}^i T = \nabla_{X_1} \left( \nabla_{X_2, \dots, X_i}^{i-1} T \right) - \sum_{j=2}^i \nabla_{X_2, \dots, \nabla_{X_1} X_j, \dots, X_i}^{i-1} T$$

*Démonstration.* C'est un simple calcul

$$\begin{aligned} \nabla^i T(X_1, \dots, X_i, Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l) &= \left( \nabla_{X_1} \left( \nabla^{i-1} T \right) \right) (X_2, \dots, X_i, Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l) \\ &= X_1 \left( \nabla_{X_2, \dots, X_i}^{i-1} T(Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l) \right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^k \nabla_{X_2, \dots, X_i}^{i-1} T(Y_1, \dots, \nabla_{X_1} Y_j, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l) \\ &\quad - \sum_{j=1}^l \nabla_{X_2, \dots, X_i}^{i-1} T(Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \nabla_{X_1} \omega_j, \dots, \omega_l) \\ &\quad - \sum_{j=2}^i \nabla^{i-1} T(X_2, \dots, \nabla_{X_1} X_j, \dots, X_i, Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l) \\ &= \nabla_{X_1} \left( \nabla_{X_2, \dots, X_i}^{i-1} T \right) (Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l) \\ &\quad - \sum_{j=2}^i \nabla_{X_2, \dots, \nabla_{X_1} X_j, \dots, X_i}^{i-1} T(Y_1, \dots, Y_k, \omega_1, \dots, \omega_l), \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

**Remarque A.3.6.** Pour la dérivée covariante de Levi-Civita comme  $\nabla g = 0$  si on contracte des tenseurs grâce alors on a avec la notation d'Hamilton

$$\nabla(T * S) = \nabla T * S + T * \nabla S.$$

Alors si  $X$  est un champ de vecteurs on a

$$X(T * S) = X(T) * S + T * X(g) * S + T * X(S).$$

Comme on a défini  $\nabla^2$  on peut donc définir la Hessienne et le laplacien d'un tenseur.

**Définition A.3.6.** Hessien et laplacien

Soit  $T \in \text{Tens}_k^l(M)$  on définit la hessienne comme étant le tenseur

$$\begin{aligned} \text{Hess}(T): \Gamma(M) \times \Gamma(M) &\longrightarrow \text{Tens}_k^l(M) \\ X, Y &\longrightarrow \nabla_{X,Y}^2 T \end{aligned}.$$

Et pour le laplacien on considère simplement la trace de la hessienne avec  $g$  c'est dire dans des coordonnées

$$\Delta T = \text{Trace}_g \text{Hess}(T) = g^{ij} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}}^2 T = g^{ij} \nabla_{i,j}^2 T$$

**Lemme A.3.5.** Calcul du laplacien dans des coordonnées

Soit  $T \in \text{Tens}_k^l(M)$  dans des coordonnées

$$\Delta T = g^{ij} \left( \nabla_i \nabla_j T - \Gamma_{ij}^k \nabla_k T \right)$$

En particulier pour  $f \in C^\infty(M)$  on a

$$\Delta f = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)$$

*Démonstration.* L'égalité vient simplement de

$$\nabla_{X,Y}^2 T = \nabla_X(\nabla_Y T) - \nabla_{\nabla_X Y} T.$$

□

Il nous reste à définir la divergence d'un champ de vecteur.

**Définition A.3.7.** Divergence

Pour  $X \in \Gamma(M)$ , on définit la divergence comme la trace du tenseur  $\nabla X$ , c'est à dire que dans des coordonnées

$$\text{div}(X) = \text{Trace} \nabla X = \nabla_i X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^i X^k$$

**Remarque A.3.7.** Pour  $f \in C^\infty(M)$  comme  $\nabla f \in \text{Tens}_0^1(M) = \Gamma(M)$  on a

$$\text{div}(\nabla f) = \text{Trace}(\nabla^2 f) = \Delta f$$

### A.3.3 Etude de la divergence

Dans la suite nous allons étudier plus en détail l'opérateur divergence notamment en montrant le Théorème de la divergence (A.3.1).

**Lemme A.3.6.** Expression de la divergence

Soit  $X \in \Gamma(M)$ , un champ de vecteurs, alors dans des coordonnées :

$$\text{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( X^i \sqrt{\det(g)} \right)$$

*Démonstration.* D'après la définition de la divergence on sait que :

$$\operatorname{div}(X) = \nabla_i X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^i X^k$$

Il nous faut donc calculer  $\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\det(g)})$  :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\det(g)}) = \frac{1}{2\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial(\det(g))}{\partial x^i} = \frac{1}{2\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial(\det(g))}{\partial q_{pq}} \frac{\partial q_{pq}}{\partial x^i}$$

Or il est connu que pour une matrice inversible  $X$ ,  $d_X \det(H) = \det(X) \operatorname{Trace}(X^{-1} \cdot H)$ . Ainsi en notant  $E_{pq}$  la matrice ayant des 0 pour chaque coordonnée et 1 en  $(p, q)$  on a :

$$\frac{\partial(\det(g))}{\partial q_{pq}} = d_g \det(E_{pq}) = \det(g) \operatorname{Trace}(g^{-1} \cdot E_{pq}) = \det(g) g^{pq}.$$

Or de plus on sait que,

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^i} = \Gamma_{ip}^m g_{mq} + \Gamma_{iq}^m g_{pm}$$

Ce qui nous donne par symétrie de  $g$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\det(g)}) = \sqrt{\det(g)} g^{pq} \Gamma_{ip}^m g_{mq} = \sqrt{\det(g)} \Gamma_{ip}^i. \quad (\text{A.3.2})$$

Ainsi on a,

$$\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i \sqrt{\det(g)}) = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^i \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\det(g)}) = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ip}^p X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ip}^i X^p,$$

où dans la dernière égalité on a juste re-indéxé les sommes.

On a donc bien le résultat voulu :

$$\operatorname{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i \sqrt{\det(g)})$$

□

Ce lemme va nous permettre de démontrer ce théorème qui nous sera utile plus tard.

**Théorème A.3.1.** *Théorème de la divergence*

Soit  $M$  une variété sans bord orientable et  $X$  un champ de vecteurs à support compact alors :

$$\int_M \operatorname{div}(X) d\mu = 0$$

où  $d\mu$  est la forme volume canonique donnée dans des coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  par  $d\mu = \sqrt{\det(g)} dx^1 \dots dx^n$ .

*Démonstration.* On utilise le produit intérieur et donc on définit une  $n-1$ -forme différentielle en posant  $\alpha = i_X d\mu$ , c'est à dire pour  $(v_1, \dots, v_{n-1})$ , on a  $\alpha(v_1, \dots, v_{n-1}) = d\mu(X, v_1, \dots, v_{n-1})$ .

Ainsi on sait que dans des coordonnées on a,

$$\alpha = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} X^i \sqrt{\det(g)} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$$

Ainsi on peut calculer,

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} d \left( X^i \sqrt{\det(g)} \right) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^k} (X^i \sqrt{\det(g)}) dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i \sqrt{\det(g)}) dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i \sqrt{\det(g)}) \right) d\mu \end{aligned}$$

Ainsi d'après le lemme précédent (A.3.6) on vient de montrer que :

$$d\alpha = \operatorname{div}(X) d\mu.$$

Ainsi d'après le théorème de Stokes,

$$\int_M \operatorname{div}(X) d\mu = \int_M d\alpha = 0.$$

□

**Corollaire A.3.2.1.** Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction  $C^\infty$  à support compact, alors :

$$\int_M \Delta f d\mu = 0$$

*Démonstration.* On sait d'après la remarque (A.3.7) que  $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$  et on utilise le théorème de la divergence (A.3.1). □

#### A.4 Application exponentielle

En géométrie riemannienne, les géodésiques sont des objets très importants car se sont des courbes  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  qui minimisent, en tout cas localement, la longueur entre  $\gamma(a)$  et  $\gamma(b)$ . Où la longueur d'une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est donnée par

$$l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Nous n'allons pas les étudier ici, le but va être simplement de définir l'application exponentielle qui nous permettra d'introduire les systèmes de coordonnées normales et d'étudier le maximum/minimum d'une fonction sur une variété. Pour cela nous allons introduire les géodésiques avec une nouvelle définition.

**Définition A.4.1.** *Géodésiques*

Une géodésique est une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  telle que si on note dans un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  que  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  alors  $\gamma$  vérifie

$$\ddot{x}^k(t) + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) = 0.$$

L'existence des géodésiques est donnée par le théorème suivant dont on admettra la preuve. La preuve étant la simple étude du système différentiel donné par les équations localement vérifiées par les géodésiques.

**Théorème A.4.1.** *Existence des géodésiques*

Il existe un ouvert maximal  $D \subset \mathbb{R} \times M$  contenant  $\{0\} \times M$  tel que pour tout  $p$  et  $v \in T_p M$  il existe une unique géodésique  $\gamma_{p,v} : J_{p,v} \rightarrow M$  telle que

$$\gamma_{p,v}(0) = p \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}_{p,v}(0) = v,$$

où  $J_{p,v} = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in D\}$ . De plus l'application  $(p, v) \rightarrow \gamma_{p,v}(t)$  est différentiable.

On peut remarquer que  $\gamma_{p,v}$  est l'unique géodésique partant de  $p$  avec une vitesse  $v$ . On aura aussi besoin du lemme suivant, que l'on ne démontrera pas, ou on utilise les mêmes notations que le théorème.

**Lemme A.4.1.** Pour tout  $0 \leq \lambda \leq 1$ , on a

$$\gamma_{p,v}(\lambda t) = \gamma_{p,\lambda v}(t).$$

On peut montrer l'existence de l'application exponentielle.

**Théorème A.4.2.** *Application exponentielle*

Pour tout  $p \in M$  il existe  $\Omega_p \subset T_p M$  un ouvert étoilé et une application différentiable

$$\exp_p : \Omega_p \rightarrow M,$$

telle que pour tout  $v \in \Omega_p$ , la courbe

$$\begin{aligned} \gamma_{p,v}: [0, 1] &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \exp_p(tv) \end{aligned} ,$$

est l'unique géodésique tel que

$$\gamma_{p,v}(0) = p \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}_{p,v}(0) = v.$$

On a alors  $\exp_p(v) = \gamma_{p,v}(1)$ .

De plus il existe un voisinage de  $V_p$  de 0 dans  $T_p M$  tel que  $\exp|_{V_p}$  soit un difféomorphisme sur un voisinage de  $p$  dans  $M$ . En particulier,

$$d_0 \exp_p = \text{id}.$$

*Démonstration.* On fixe  $p \in M$ , par le théorème précédent, on sait qu'il existe  $\lambda > 0$  tel que  $[-\lambda, \lambda] \subset J_{p,v}$  pour tout  $v \in T_p M$ . Ainsi  $\gamma_{p,v}$  est définie sur  $[-\lambda, \lambda]$ . D'après le lemme précédent  $\gamma_{p,\lambda v}$  est définie sur  $[0, 1]$  donc l'ensemble des vecteurs  $v \in T_p M$  tels que  $1 \in J_{p,v}$  est un ouvert  $\Omega_p \subset T_p M$  contenant 0. Or d'après le lemme précédent si  $v \in \Omega_p$  alors pour tout  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $\lambda v \in \Omega_p$ , donc  $\Omega_p$  est étoilé en 0.

Pour la différentielle de  $\exp_p$  en 0, on identifie  $T_0(T_p M)$  à  $T_p M$  et on a

$$d_0 \exp_p(w) = \frac{d}{dt} \left( \exp_p(tw) \right) (0) = \frac{d\gamma_{p,w}}{dt} (0) = w.$$

De plus par le théorème d'inversion locale  $\exp_p$  est un difféomorphisme local. □

On peut maintenant introduire un système de coordonnées particulières, appelées coordonnées normales.

**Proposition A.4.1. Coordonnées normales**

Soit  $p \in M$ , il existe un voisinage ouvert  $V_p \subset M$  et une application différentiable  $\Phi_p: V_p \rightarrow T_p M = \mathbb{R}^n$  tel que

$$\Phi(V_p) \subset \Omega_p \quad \text{et} \quad \exp_p \circ \Phi_p = \text{id}_{V_p}.$$

Alors soit  $(x^1, \dots, x^n)$  une base orthonormale de  $T_p M$  pour  $g_p$ , alors  $(V_p, \Phi_p)$  définit un système de coordonnées sur  $V_p$ , appelées coordonnées normales en  $p$ . De plus dans ces coordonnées en  $p$  on a :

$$g_{ij} = \delta_i^j, \quad \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = 0, \quad \Gamma_{ij}^k = 0.$$

*Démonstration.* L'existence de  $\Phi_p$  est directement donnée par le théorème précédent.

On remarque d'abord que  $\Phi_p(p) = 0$  car  $\exp_p(0) = p$  donc  $g_{ij} = \delta_i^j$  car  $(x^1, \dots, x^n)$  est une base orthonormale. D'autre part on peut définir la géodésique dans ce système de coordonnées de coordonnées, pour  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \quad \text{où} \quad x^i(t) = ta^i.$$

Pour cette géodésique

$$\dot{x}^i(t) = a^i \quad \text{et} \quad \ddot{x}^i(t) = 0.$$

Donc l'équation des géodésiques donne

$$\Gamma_{ij}^k a^i a^j = 0.$$

Et ceci pour tout  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  donc  $\Gamma_{ij}^k = 0$ . Et de plus

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^k g_{mk} + \Gamma_{ik}^m g_{jm} = 0.$$

□

Dans cette partie il nous reste plus qu'à utiliser l'application exponentielle pour démontrer le lemme suivant.



**Lemme A.4.2.** Soit  $u: \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^2$ . Si  $u$  admet un minimum local en  $p \in M$  on a

$$\nabla u(p) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta u(p) \geq 0.$$

Et si  $u$  admet un maximum local en  $p \in M$  on a

$$\nabla u(p) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta u(p) \leq 0.$$

*Démonstration.* On fixe  $p \in M$  et  $(x^1, \dots, x^n)$  des coordonnées normales en  $p$ . On sait donc que

$$\nabla_i u(p) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} u(p) = \frac{\partial u}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad \Delta u = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x^k} \right) = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^{i^2}}.$$

On s'intéresse au cas où  $u$  est minimum en  $p$ , dans l'autre cas il suffit de considérer  $v = -u$ . On fixe  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ , on note  $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  et pour  $\varepsilon > 0$  on peut définir pour  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$u_{e_i}(t) = u(\exp_p(te_i)). \tag{A.4.1}$$

Ainsi  $u_{e_i}(0) = u(p)$  et on sait que  $\dot{u}_{e_i}(0) = 0$  et  $\ddot{u}_{e_i}(0) \geq 0$ . Or on a

$$\dot{u}_{e_i}(t) = d_{\exp_p(te_i)} u \left( d_{te_i} \exp_p(e_i) \right) = \frac{\partial u}{\partial x^l} \left( \exp_p(te_i) \right) \left( d_{te_i} \exp_p(e_i) \right)^l,$$

ce qui donne

$$0 = \dot{u}_{e_i}(0) = d_p u \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial u}{\partial x^i}(p).$$

De plus

$$\begin{aligned} 0 \leq \ddot{u}_{e_i}(0) &= d_p \frac{\partial u}{\partial x^l} \left( d_0 \exp_p(e_i) \right) \left( d_{te_i} \exp_p(e_i) \right)^l + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x^l}(p)}_{=0} \frac{\partial}{\partial t} \left( d_{te_i} \exp_p(e_i) \right)^l \\ &= d_p \frac{\partial u}{\partial x^l} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \delta_i^l \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^{i^2}}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

## B Courbure d'une variété

On introduit maintenant la notion de courbure, pour cela on introduit le tenseur de Riemann-Christoffel et celui de seconde forme fondamentale.

### B.1 Tenseur de Riemann-Christoffel

Pour  $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ , on a généralement,

$$\nabla_X \nabla_Y Z \neq \nabla_Y \nabla_X Z.$$

L'objectif va être de mesurer cette écart, pour cela on va utiliser le tenseur de Riemann-Christoffel.

**Définition B.1.1.** *Tenseur de Riemann-Christoffel.*

On définit un tenseur de courbure  $R \in \text{Tens}_3^1(M)$ , comme suit :

$$\begin{aligned} R: \quad \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) &\longrightarrow \Gamma(M) \\ X, Y, Z &\longmapsto R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

On notera donc ces coordonnées  $R_{ijk}^l$ . On peut faire descendre un indice avec  $g$  et définir un tenseur  $\tilde{R} \in \text{Tens}_4^0(M)$ , ainsi pour  $X, Y, Z, W \in \Gamma(M)$ , on a :

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

$R$  et  $\tilde{R}$  représente le même tenseurs donc on notera les coordonnées de  $\tilde{R}$ ,  $R_{ijkl}$ , et on sait que l'on a la relation :

$$R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}^m \quad \text{et} \quad R_{ijk}^l = g^{lm} R_{ijkl}$$

**Remarque B.1.1.** Pour que cette définition ait un sens il nous faut vérifier que  $R$  soit bien  $C^\infty(M)$ -multilinéaire. Ainsi soit  $X, Y, Z \in \Gamma(M)$  et  $f, g, h \in C^\infty(M)$ , on a tout d'abord

$$[fX, gY] = fX(gY) - gY(fX) = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$$

Ainsi en utilisant les propriétés algébrique vérifié par une dérivée covariante on a :

$$\begin{aligned} R(fX, gY)hZ &= \nabla_{fX} \nabla_{gY} hZ - \nabla_{gY} \nabla_{fX} hZ - \nabla_{[fX, gY]} hZ \\ &= fg(\nabla_X \nabla_Y hZ - \nabla_Y \nabla_X hZ) + fX(g) \nabla_Y hZ - gY(f) \nabla_X hZ - \nabla_{fg[X, Y]} hZ \\ &\quad + \nabla_{fX(g)Y} hZ - \nabla_{gY(f)X} hZ \\ &= fg(\nabla_X (Y(h)Z + h \nabla_Y Z) - \nabla_Y (X(h)Z + h \nabla_X Z)) + fX(g) \nabla_Y hZ - gY(f) \nabla_X hZ \\ &\quad - fg([X, Y](h)Z + h \nabla_{[X, Y]} Z) - fX(g) \nabla_Y hZ + gY(f) \nabla_X hZ \\ &= fg(X(Y(h)Z + Y(h) \nabla_X Z + X(h) \nabla_Y Z + h \nabla_X \nabla_Y Z - Y(X(h)Z - X(h) \nabla_Y Z + Y(h) \nabla_X Z + h \nabla_Y \nabla_X Z) \\ &\quad - fg[X, Y](h)Z - fgh \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= fgh(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) \\ &= fghR(X, Y)Z \end{aligned}$$

La définition a donc un sens.

On peut remarquer que le tenseur de courbure possède certaine symétrie et propriété géométrique, c'est le but de la proposition suivante.

**Proposition B.1.1.** Propriétés algébriques du tenseur de courbure

Pour  $X, Y, Z, W \in \Gamma(M)$  on a :

1.  $R(X, Y)Z = -R(X, Y)Z$ ,
2.  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$  (identité de Bianchi),
3.  $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$ ,
4.  $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$ .

Ce qui, exprimé dans le tenseur  $\tilde{R}$ , donne :

1.  $\tilde{R}(X, Y, Z, W) = -\tilde{R}(Y, X, Z, W)$ ,
2.  $\tilde{R}(X, Y, Z, W) + \tilde{R}(Y, Z, X, W) + \tilde{R}(Z, X, Y, W) = 0$ ,
3.  $\tilde{R}(X, Y, Z, W) = -\tilde{R}(X, Y, W, Z)$ ,
4.  $\tilde{R}(X, Y, Z, W) = \tilde{R}(Z, W, X, Y)$ .

Et dans des coordonnées cela donne :

1.  $R_{ijkl} = -R_{jikl}$ ,
2.  $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$ ,
3.  $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$ ,
4.  $R_{ijkl} = R_{klij}$ .

*Démonstration.* (1) découle directement de la définition sachant que  $[X, Y] = -[Y, X]$ .

Pour (2) on utilise le fait que  $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [Y, X]$  (car la dérivée covariante de Levi-Civita est sans torsion) et l'identité de Jacobi pour  $[\cdot, \cdot]$  :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_Z \nabla_X Y \\ &\quad - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= \nabla_X (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y (\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z (\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &\quad - \nabla_{[Y, Z]} X - \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= \nabla_X [Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_Y [Z, X] - \nabla_{[Z, X]} Y + \nabla_Z [X, Y] - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pour le point (3), par linéarité de  $g$ , il nous suffit de montrer que pour tout  $W \in \Gamma(M)$ , on a :

$$g(R(X, Y)W, W) = 0.$$

Or on sait que  $\nabla$  est compatible avec  $g$ , ce qui nous donne :

$$X \circ Y (g(W, W)) = 2Xg(\nabla_Y W, W) = 2g(\nabla_X \nabla_Y W, W) + 2g(\nabla_Y W, \nabla_X W),$$

de même,

$$Y \circ X (g(W, W)) = 2g(\nabla_Y \nabla_X W, W) + 2g(\nabla_Y W, \nabla_X W).$$

Ce qui donne,

$$g(\nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W, W) = \frac{1}{2} [X, Y] g(W, W) = g(\nabla_{[X, Y]} W, W),$$

donc

$$g(R(X, Y)W, W) = 0.$$

Pour le point (4), il est plus facile de considérer  $\tilde{R}$ , tout d'abord grâce au point (2), on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y, Z, W) + \tilde{R}(Y, Z, X, W) + \tilde{R}(Z, X, Y, W) &= 0 \\ \tilde{R}(Y, Z, W, X) + \tilde{R}(Z, W, Y, X) + \tilde{R}(W, Y, Z, X) &= 0 \\ \tilde{R}(Z, W, X, Y) + \tilde{R}(W, X, Z, Y) + \tilde{R}(X, Z, W, Y) &= 0 \\ \tilde{R}(W, X, Y, Z) + \tilde{R}(X, Y, W, Z) + \tilde{R}(Y, W, X, Z) &= 0 \end{aligned}$$

On somme les 4 lignes, on remarque que grâce aux points (1) et (3) les deux premières colonnes s'annulent. De plus, on en déduit que  $\tilde{R}(Z, X, Y, W) = \tilde{R}(X, Z, W, Y)$  et  $\tilde{R}(W, Y, Z, X) = \tilde{R}(Y, W, X, Z)$ , il nous reste donc :

$$\tilde{R}(Z, X, Y, W) + \tilde{R}(W, Y, Z, X) = 0 \quad \text{et par (1)} \quad \tilde{R}(Z, X, Y, W) = \tilde{R}(Y, W, Z, X),$$

d'où le résultat voulu. □

**Remarque B.1.2.** Comme on l'a vu le tenseur de courbure  $R$  permet de mesurer le défaut de commutativité entre 2 dérivées covariantes. En particulier si on se place dans des coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ , comme  $\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$ , pour  $X \in \Gamma(M)$ , on a :

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j X - \nabla_j \nabla_i X &= R \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) X \\ &= X^l R \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^l} \\ &= X^l R_{ijl}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= X^l R_{ijkl} g^{ks} \frac{\partial}{\partial x^s}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\nabla_i \nabla_j X^s - \nabla_j \nabla_i X^s = X^l R_{ijl}^s = X^l R_{ijkl} g^{ks}.$$

De la même manière comme on a défini une dérivée covariante pour les 1-formes, le tenseur de courbure nous permet encore de mesurer le défaut de commutativité. Ainsi soit  $\omega \in \Gamma^*(M)$  et  $Y \in cv$ , on sait par définition de la dérivée covariante d'une 1-forme :

$$\begin{aligned} (\nabla_i \nabla_j \omega - \nabla_j \nabla_i \omega)(Y) &= \frac{\partial}{\partial x^i} (\nabla_j \omega(Y)) - \nabla_j \omega(\nabla_i Y) - \frac{\partial}{\partial x^j} (\nabla_i \omega(Y)) + \nabla_i \omega(\nabla_j Y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} (\omega(Y)) - \frac{\partial}{\partial x^i} (\omega(\nabla_j Y)) - \frac{\partial}{\partial x^j} (\omega(\nabla_i Y)) + \omega(\nabla_j \nabla_i Y) - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} (\omega(Y)) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^j} (\omega(\nabla_i Y)) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\omega(\nabla_j Y)) - \omega(\nabla_i \nabla_j Y) \\ &= \omega(\nabla_i \nabla_j Y - \nabla_j \nabla_i Y) \\ &= \omega \left( -Y^l R_{ijl}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= -Y^l R_{ijl}^k \omega_k \end{aligned}$$

Ainsi on a le résultat suivant, pour  $\omega \in \Gamma^*(M)$ ,

$$\nabla_i \nabla_j \omega - \nabla_j \nabla_i \omega = -R_{ijl}^k \omega_k dx^l = -R_{ijkl} g^{ks} \omega_s dx^l = R_{ijkl} g^{ks} \omega_s dx^l \quad (\text{B.1.1})$$

De la même manière on peut généraliser se calcul aux tenseurs quelconques. Ainsi soit  $T \in \text{Tens}_l^k(M)$ , tel que dans les coordonnées  $T$  s'écrit comme :

$$T = T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_l}.$$

On a tout d'abord,

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j T &= \nabla_i \nabla_j \left[ T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_l} \right] \\ &= \nabla_i \left[ \frac{\partial}{\partial x^j} \left( T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} \right) dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_l} + T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} \nabla_j \left( dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_l} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} \right) dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_l} + \frac{\partial}{\partial x^j} \left( T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} \right) \nabla_i \left( dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_l} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} \right) \nabla_j \left( dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_l} \right) + T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} \nabla_i \nabla_j \left( dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_l} \right). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne,

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j T - \nabla_j \nabla_i T &= T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} \left[ \nabla_i \nabla_j \left( dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_l} \right) - \nabla_j \nabla_i \left( dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_l} \right) \right] \\ &= T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} \left[ \sum_{s=1}^k dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \left[ \nabla_i \nabla_j (\partial_{i_s}) - \nabla_j \nabla_i (\partial_{i_s}) \right] \otimes \dots \otimes \partial_{i_l} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^l dx^{j_1} \otimes \dots \otimes \left[ \nabla_i \nabla_j (dx^{j_s}) - \nabla_j \nabla_i (dx^{j_s}) \right] \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_l} \right] \\ &= T_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} \left[ \sum_{s=1}^k R_{ij i_s m} g^{mz} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_m \otimes \dots \otimes \partial_{i_l} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^l R_{ij m z} g^{m j_s} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^z \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_l} \right]. \end{aligned}$$

Si on utilise la notation d'Hamilton on a simplement,

$$\nabla_i \nabla_j T - \nabla_j \nabla_i T = R * T.$$

Ces formules nous seront utiles plus tard dans notre étude.

En attendant, il nous reste à calculer l'expression dans des coordonnées de  $R$  en fonction de  $g$  et ainsi de montrer qu'il ne dépend que de  $g$  et de ses dérivées premières et secondes, c'est l'objectif de la propriété suivante.

**Proposition B.1.2.** *Composantes du tenseur de courbure dans des coordonnées*

Soit  $x^1, \dots, x^n$  des coordonnées sur  $U \subset M$ , alors :

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^l_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm}.$$

*Démonstration.* On sait que par définition,

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j \frac{\partial}{\partial x^k} &= \nabla_i \left( \Gamma^m_{jk} \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &= \Gamma^m_{jk} \nabla_i \frac{\partial}{\partial x^m} + \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^m_{jk} \frac{\partial}{\partial x^m} \\ &= \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} \frac{\partial}{\partial x^l} + \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^m_{jk} \frac{\partial}{\partial x^m} \\ &= \left( \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} + \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^l_{jk} \right) \frac{\partial}{\partial x^m}. \end{aligned}$$

Par symétrie on a donc,

$$\nabla_j \nabla_i \frac{\partial}{\partial x^k} = \left( \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^l_{ik} \right) \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Donc

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} &= \nabla_i \nabla_j \frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_j \nabla_i \frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \nabla_i \nabla_j \frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_j \nabla_i \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \left( \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} + \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^l_{jk} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^l_{ik} \right) \frac{\partial}{\partial x^m} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat voulu,

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^l_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm}.$$

□

## B.2 Cas des sous-variétés et seconde forme fondamentale

Le tenseur de courbure nous donne une notion intrinsèque de courbure. Or, dans notre étude nous considérons des sous-variétés d'une variété riemannienne, ceci va nous permettre de définir un nouvel opérateur la seconde forme fondamentale et comme on le verra on pourra exprimer le tenseur de Riemann-Christoffel en fonction de la seconde forme fondamentale. C'est cet opérateur qui nous sera utile ensuite. Mais tout d'abord introduisons quelques notations.

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne de dimension  $m$  et  $N \subset M$  une sous-variété de dimension  $n$ . On introduit tout d'abord la notion de système de coordonnées adapté à  $N$ .

**Définition B.2.1.** *Système de coordonnées adapté à  $N$*

Soit  $U$  un ouvert de  $M$  et  $(x^1, \dots, x^m)$  un système de coordonnées sur  $U$ , alors il est dit adapté à la sous-variété  $N$  de dimension  $n$  si

$$N \cap U = \{x \in U \mid x^{n+1} = \dots = x^m = 0\}.$$

On a donc pour tout  $p \in U$ ,  $T_p N = \text{Vect}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ .

**Remarque B.2.1.** L'existence même d'un système de coordonnées est donnée par la définition d'une sous-variété.

De plus on sait que pour  $p \in N$ , on peut identifier  $T_p N$  à un sous-espace vectoriel de  $T_p M$ , c'est ce que nous ferons par la suite. On note tout d'abord, pour  $p \in N$ ,

$$T_p N^\perp = \{v \in T_p M \mid v \perp T_p N\},$$

où on considère l'orthogonal avec le produit scalaire  $g_p$ .

Ainsi on a,

1.  $T_p M = T_p N \oplus T_p N^\perp$
2.  $\dim T_p N^\perp = \dim T_p M - \dim T_p N = m - n$

On note aussi les projections naturelles,

$$\Pi_p: T_p M \longrightarrow T_p N \quad \text{et} \quad \Pi_p^\perp: T_p M \longrightarrow T_p N^\perp.$$

Il nous reste à introduire  $\bar{g} = g|_N$ , la restriction de  $g$  à la sous-variété  $N$ . On dit que  $g^N$  est la première forme fondamentale de  $N$  et on peut remarquer que  $(N, g^N)$  est une variété riemannienne.

Et on pour finir on note  $\Gamma(M, N)$  l'ensemble des champs de vecteurs de  $M$  qui sont tangents à  $N$  en tout point  $p \in N$ :

$$\Gamma(M, N) = \{X \in \Gamma(M) \mid X_p \in T_p N, \forall p \in N\}$$

On commence par montrer ce lemme ou l'objectif et d'étudier le lien entre  $\Gamma(N)$  et  $\Gamma(M, N)$ .

**Lemme B.2.1.** Pour  $X \in \Gamma(M)$ , on a :

1.  $X \in \Gamma(M, N)$  si et seulement si  $X(f) = 0$  pour tout  $f \in C^\infty(M)$  constante sur  $N$ ,
2. si  $X, Y \in \Gamma(M, N)$  alors  $[X, Y] \in \Gamma(M, N)$ ,
3. L'application de restriction  $\Gamma(M, N) \rightarrow \Gamma(N)$  est surjective ainsi tout champ de vecteur  $X \in \Gamma(N)$  peut-être prolongé par une extension (non unique)  $\tilde{X} \in \Gamma(M, N)$  qui est un champ de vecteurs de  $M$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $X \in \Gamma(M, N)$  et  $f \in C^\infty(M)$  une fonction constante sur  $N$ . Pour un point  $p \in N$ , on choisit une courbe  $\gamma: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow N$  telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\frac{d\gamma}{dt}(0) = X_p$ , alors

$$X_p(f) = \frac{df \circ \gamma}{dt}(0) = 0.$$

Pour le sens inverse on considère  $(x^1, \dots, x^m)$  un système de coordonnées adapté à  $N$ . Soit  $X = \sum_{j=1}^m X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \Gamma(M)$  qui s'annule sur toute fonction constante sur  $N$ , alors  $X^j = X(x^j) = 0$  pour  $n+1 \leq j \leq m$ . Ainsi

$$X = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \Gamma N.$$

2. On utilise (1), soit  $f \in C^\infty(M)$  constante sur  $N$ , alors

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = 0 - 0 = 0.$$

3. Soit un champ  $X \in \Gamma(N)$  on doit construire une extension  $\tilde{X} \in \Gamma(M)$  telle que  $X_p = \tilde{X}_p$  pour  $p \in N$ . Pour cela on introduit  $(x^1, \dots, x^m)$  un système de coordonnées sur  $U$  adaptées à  $N$ , on a donc  $X \cap U \{x \in U \mid x^{n+1} = \dots = x^m = 0\}$ . Ainsi  $X$  s'écrit sur  $U \cap U$ ,  $X = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  et on définit  $\tilde{X}$  par la même formule mais cette fois sur  $U$  tout entier, et on conclut en utilisant une partition de l'unité sur  $M$ . □

Celui nous permet de définir la seconde forme fondamentale.

**Définition B.2.2.** *Seconde forme fondamentale*

Soit  $X, Y \in \Gamma(N)$  deux champs de vecteurs de  $N$ ,  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(M, N)$  des extensions de  $X$  et  $Y$  et  $p$  un point de  $N$ , alors on pose :

$$\nabla_X^N Y = \Pi(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}) \in T_p N$$

Et on définit la seconde forme fondamentale de  $N \subset M$  comme :

$$A(X, Y) = \Pi^\perp(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}) \in T_p N^\perp$$

Ainsi on peut observer que l'on a :

$$\nabla_X Y = \nabla_X^N Y + (X, Y)$$

Nous devons d'abord nous assurer de la bonne définition de  $A$  et  $\nabla^N$ .

**Proposition B.2.1.**  $A$  et  $\nabla^N$  sont bien définis car ne dépende pas de l'extension de  $X$  et  $Y$ .

*Démonstration.* Soit  $X, Y \in \Gamma(N)$  et  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(M, N)$  des extensions de  $X$  et  $Y$ . Soit  $(x^1, \dots, x^m)$  un système de coordonnées sur  $U \subset M$  adaptées à  $N$ . On note dans ce système de coordonnées  $X = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ ,  $Y = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  et de même  $\tilde{X} = \sum_{j=1}^n \tilde{X}^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ ,  $\tilde{Y} = \sum_{j=1}^n \tilde{Y}^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Alors on sait que sur  $U$

$$\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \left( \tilde{X}^i \frac{\partial \tilde{Y}^k}{\partial x^k} + \tilde{X}^i \tilde{Y}^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Or  $X = \tilde{X}$  et  $Y = \tilde{Y}$  sur  $N$ , donc sur  $U \cap N$  on a pour  $j \leq n$ ,  $X^j = \tilde{X}^j$  et  $Y^j = \tilde{Y}^j$  et pour  $j > n$ ,  $\tilde{X}^j = \tilde{Y}^j = 0$  en particulier pour tout  $i$ ,  $\frac{\partial \tilde{Y}^j}{\partial x^i} = 0$ . De plus pour  $p \in U \cap N$ , on a  $T_p N = \text{Vect}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$  donc pour  $p \in U \cap N$

$$A(X, Y) = \Pi^\perp(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}) = \sum_{k=n+1}^m \left( \tilde{X}^i \frac{\partial \tilde{Y}^k}{\partial x^k} + \tilde{X}^i \tilde{Y}^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{k=n+1}^m \tilde{X}^i \tilde{Y}^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{k=n+1}^m X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

et

$$\nabla_X^N Y = \Pi_p(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}) = \sum_{k=1}^n \left( \tilde{X}^i \frac{\partial \tilde{Y}^k}{\partial x^k} + \tilde{X}^i \tilde{Y}^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{k=1}^n \left( X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^k} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k},$$

car pour  $j > n$ ,  $\tilde{X}^j = \tilde{Y}^j = 0$ .

Ainsi  $A(X, Y)$  et  $\nabla_X^N Y$  ne dépende que de la valeur de  $X$  et  $Y$  sur  $N$ . □

On peut maintenant s'intéresser à  $\nabla^N$ .

**Proposition B.2.2.**  $\nabla^N$  est la dérivée covariante de Levi-Civita de  $(N, g^N)$ .

*Démonstration.* Il est clair que  $\nabla^N$  vérifie les hypothèses d'une dérivée covariante car  $\Pi$  est  $C^\infty(N)$ -linéaire, il nous reste à montrer qu'elle est sans torsion et qu'elle respecte la métrique.

Soit  $X, Y \in \Gamma(N)$  que l'on étend en des champs de vecteurs  $X, Y \in \Gamma(M, N)$ . Par le lemme précédent (B.2.1) on sait que  $[X, Y] \in \Gamma(M, N)$  ainsi comme  $\nabla$  est la dérivée covariante de Levi-Civita de  $(M, g)$  on a :

$$\nabla_X^N Y - \nabla_Y^N X = \Pi(\nabla_X Y) - \Pi(\nabla_Y X) = \Pi([X, Y]) = [X, Y].$$

Donc  $\nabla^N$  est sans torsion.

Soit  $X, Y, Z \in \Gamma(N)$  que l'on étend en des champs  $X, Y, Z \in \Gamma(M, N)$ , on a :

$$\begin{aligned} Zg^N(X, Y) &= Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(\nabla_Z^N X, Y) + g(X, \nabla_Z^N Y) + g(A(Z, X), Y) + g(Y, A(Z, Y)) \\ &= g(\nabla_Z^N X, Y) + g(X, \nabla_Z^N Y) \\ &= g^N(\nabla_Z^N X, Y) + g^N(X, \nabla_Z^N Y), \end{aligned}$$

donc  $g^N$  respecte la métrique  $g^N$ . □

On peut maintenant s'intéresser à la seconde forme fondamentale de  $N \subset M$ .

**Proposition B.2.3.** *A vérifie :*

1.  $A$  est  $C^\infty(N)$ -bilinéaire,
2. Pour  $p \in N$ ,  $A_p: T_p N \times T_p N \longrightarrow T_p N^\perp$  est bien défini, c'est à dire que  $A(X, Y)$  ne dépend que des valeurs de  $X$  et  $Y$  en  $p \in N$ .
3.  $A$  est symétrique.

C'est à dire que  $A$  nous définit un opérateur  $C^\infty(N)$ -bilinéaire

$$A: \Gamma(N) \times \Gamma(N) \longrightarrow \Gamma(M).$$

*Démonstration.* 1. Il est clair que  $A$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire.

Soit  $f, g \in C^\infty(N)$ , et  $X, Y \in \Gamma(N)$  que l'on étend en des champs  $X, Y \in \Gamma(M, N)$  et en des fonctions  $f \in C^\infty(M)$  et  $g \in C^\infty(M)$ . Et en tout point  $p \in N$  on a :

$$\begin{aligned} A(fX, gY) &= \Pi^\perp(\nabla_{fX}(gY)) \\ &= \Pi^\perp(fg\nabla_X Y + fX(g)Y) \\ &= fg\Pi^\perp(\nabla_X Y) + f\underbrace{\Pi^\perp(X(g)Y)}_{=0 \text{ car } Y \in T_p N} \\ &= fgA(X, Y). \end{aligned}$$

2. Déjà montré avec la proposition (B.2.1).

3. Nous avons pour  $X, Y \in \Gamma(N)$  que l'on étend en des champs  $X, Y \in \Gamma(M, N)$ ,

$$\begin{aligned} A(X, Y) - A(Y, X) &= \Pi^\perp(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= \Pi^\perp([X, Y]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car  $[X, Y] \in \Gamma(M, N)$  d'après le lemme (B.2.1). □

On peut maintenant montrer les équations fondamentales vérifiées par la seconde forme fondamentale  $A$ , à savoir les équations de Weingarten et de Gauss. Elles vont nous permettre de faire le lien entre les tenseurs de courbure de  $N$  et  $M$ .

**Proposition B.2.4.** *Equation de Weingarten*

Soient  $X, Y, W \in \Gamma(M)$  tels que  $X, Y \in \Gamma(M, N)$  et que pour tout  $p \in N$ ,  $W_p \in T_p N^\perp$ , alors :

$$\forall p \in N, \quad g_p(\nabla_X W, Y) = -g_p(W, A(X, Y)) \quad (\text{B.2.1})$$

*Démonstration.* Pour  $p \in N$ , comme  $W_p \in T_p N^\perp$ , on a  $g(W, Y) = 0$ . De plus comme  $\nabla$  est la dérivée covariante de Levi-Civita on a,

$$\begin{aligned} 0 &= Xg(W, Y) = g(\nabla_X W, Y) + g(W, \nabla_X Y) \\ &= g(\nabla_X W, Y) + g(W, \nabla_X^N Y) + g(W, A(X, Y)) \end{aligned}$$

or  $\nabla_X^N Y_p \in T_p N$  et  $W_p \in T_p N^\perp$  donc  $g(W, \nabla_X^N Y) = 0$  d'où :

$$g_p(\nabla_X W, Y) = -g_p(W, A(X, Y))$$
□

**Proposition B.2.5.** *Equation de Gauss*

Soient  $X, Y, Z, W \in T_p N$ , on note  $R$  le tenseur de courbure de  $(M, g)$  et  $R^N$  celui de  $(N, g^N)$  alors :

$$g^N(R^N(X, Y)Z, W) - g(R(X, Y)Z, W) = g(A(X, W), A(Y, Z)) - g(B(X, Z), B(Y, W)). \quad (\text{B.2.2})$$

Pour donner un sens à  $g(R(X, Y)Z, W)$ , on étend  $X, Y, Z, W$  à des champs dans  $\Gamma(M, N)$ .



*Démonstration.* On étend les champs de vecteurs  $X, Y, Z, W$  en champs  $X, Y, Z, W \in \Gamma(M, N)$ .  
Et on a tout d'abord,

$$\begin{aligned}\nabla_X^N \nabla_Y^N Z &= \nabla_X (\nabla_Y^N Z) - A(X, \nabla_Y^N Z) \\ &= \nabla_X (\nabla_Y Z - A(Y, Z)) - A(X, \nabla_Y^N Z) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X A(Y, Z) - A(X, \nabla_Y^N Z)\end{aligned}$$

Or pour tout  $p \in N$ ,  $W_p \in T_p N$  et  $A(X, \nabla_Y^N Z)_p \in T_p N^\perp$  donc

$$g(\nabla_X^N \nabla_Y^N Z, W) = g(\nabla_X \nabla_Y Z, W) - g(\nabla_X A(Y, Z), W).$$

De plus par l'équation de Weingarten (B.2.1) :

$$g(\nabla_X A(Y, Z), W) = -g(A(Y, Z), A(X, W)),$$

donc

$$g(\nabla_X^N \nabla_Y^N Z, W) = g(\nabla_X \nabla_Y Z, W) + g(A(Y, Z), A(X, W)).$$

De la même manière on a :

$$g(\nabla_Y^N \nabla_X^N Z, W) = g(\nabla_Y \nabla_X Z, W) + g(A(X, Z), A(Y, W)).$$

Il nous reste plus qu'un terme à calculer, et on sait déjà que :

$$\nabla_{[X, Y]}^N Z = \nabla_{[X, Y]} Z - A([X, Y], Z).$$

Or pour tout  $p \in N$ ,  $W_p \in T_p N$  et  $A([X, Y], Z)_p \in T_p N^\perp$  donc

$$g(\nabla_{[X, Y]}^N Z, W) = g(\nabla_{[X, Y]} Z, W).$$

Ainsi on a donc :

$$\begin{aligned}g(\mathbb{R}^N(X, Y)Z, W) &= g(\nabla_X^N \nabla_Y^N Z - \nabla_Y^N \nabla_X^N Z - \nabla_{[X, Y]}^N Z, W) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y Z, W) + g(A(Y, Z), A(X, W)) - g(\nabla_Y \nabla_X Z, W) - g(A(X, Z), A(Y, W)) \\ &\quad - g(\nabla_{[X, Y]} Z, W) \\ &= g(\mathbb{R}(X, Y)Z, W) + g(A(X, W), A(Y, Z)) - g(A(X, Z), A(Y, W)),\end{aligned}$$

d'où l'équation de Gauss (B.2.2) □

### B.3 Cas des sous-variétés de co-dimension 1

Maintenant on ne s'intéresse qu'au sous-variétés de co-dimension 1, c'est à dire qu'on considère  $N$  une sous-variété de  $(M, g)$  telle que  $n = \dim(N) = \dim(M) - 1$ .

#### B.3.1 Cas générale

Nous introduisons maintenant la notion de vecteur normal qui nous sera très utile.

**Définition B.3.1.** *Un vecteur normal est une application  $C^\infty$ ,  $\nu: N \rightarrow TM$  telle que*

$$\nu_p \perp T_p N \text{ pour } g_p \text{ et } \|\nu_p\| = 1.$$

*On appelle aussi cela une co-orientation ou l'application de Gauss si  $n = 2$ .*

On s'assure d'abord de son existence.

**Proposition B.3.1.** *Il existe un vecteur-normal.*

*Démonstration.* Au voisinage de tout point  $p$  on utilise un système de coordonnées adaptée à  $N$  pour définir  $\nu$  puis on vérifie que la définition respecte bien les changement de coordonnées.  $\square$

Comme  $\dim(N) = \dim(M) - 1$ , pour tout  $p \in N$ ,  $\dim(T_p N^\perp = 1$  donc  $T_p N = \text{Vect}(\nu_p)$ . Ainsi pour tout  $X, Y \in \Gamma(N)$  on a

$$A(X, Y) = \lambda(X, Y)\nu.$$

Ceci justifie la définition suivante.

**Définition B.3.2.** *La seconde forme fondamentale scalaire est l'application*

$$B: TN \times TN \longrightarrow C^\infty(N),$$

qui vérifie pour tout  $X, Y \in \Gamma(N)$

$$A(X, Y) = B(X, Y)\nu \quad \text{i.e.} \quad g(A(X, Y), \nu) = B(X, Y).$$

En particulier grâce à la proposition (B.2.3) on sait que  $B \in \text{Tens}_2^0(N)$  et que  $B$  est symétrique. En particulier nous noterons dans des coordonnées  $h_{ij} = B\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = B_{ij}$ .

De plus comme  $B$  est un tenseur nous pouvons prendre sa trace, ce qui nous définit  $H$  la courbure moyenne ainsi dans des coordonnées

$$H = \text{Trace}(B) = g^{ij} h_{ij}.$$

Comme  $B$  est un tenseur dans  $\text{Tens}_2^0(N)$  on peut grâce à  $g$  le représenter comme un tenseur  $\text{Tens}_1^1(N)$  c'est à dire une matrice ou une application linéaire qui est appelé l'opérateur de Weingarten.

**Définition/Proposition B.3.1.** *Opérateur de Weingarten*

On définit  $L$  un endomorphisme

$$\begin{aligned} L: TN &\longrightarrow TN \\ X &\longmapsto -\nabla_X \nu \end{aligned}$$

qui est symétrique et qui vérifie pour tout  $X, Y \in \Gamma(N)$ ,

$$g(L(X), Y) = B(X, Y). \tag{B.3.1}$$

*Démonstration.* On sait déjà qu'il existe un unique endomorphisme  $L: TN \rightarrow TN$  (i.e  $L \in \text{Tens}_1^1$ ) vérifiant (B.3.1). Il nous reste à faut montrer que  $L(X) = -\nabla_X \nu$  pour tout  $X \in \Gamma(N)$ . Pour cela on commence par montrer que pour  $X \in \Gamma(N)$  on a  $\nabla_X \nu \in TN$ , or on sait que  $\|\nu\| = 1$  et comme  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita

$$0 = X(g(\nu, \nu)) = 2g(\nabla_X \nu, \nu) = 0,$$

donc  $-\nabla_X \nu \in TN$ .

Comme  $\nu_p \in T_p N^\perp$  et d'après l'équation de Weingarten (B.2.1) on a

$$g(-\nabla_X \nu, Y) = g(A(X, Y), \nu) = B(X, Y),$$

d'où le résultat.  $\square$

On étudie maintenant la dérivée covariant de la seconde forme fondamentale, pour cela on montre l'équation de Codazzi.

**Proposition B.3.2.** *Equation de Codazzi*

Pour  $X, Y, Z \in \Gamma(N)$  que l'on a étendu en des champs  $X, Y, Z \in \Gamma(M, N)$  on a sur  $N$

$$g(R(X, Y)Z, \nu) = \nabla_X^N B(X, Z) - \nabla_Y^N B(X, Z).$$

*Démonstration.* Pour  $X, Y, Z \in \Gamma(N)$  que l'on a étendu en des champs  $X, Y, Z \in \Gamma(M, N)$  on a

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X (\nabla_Y^N Z) + \nabla_X (B(Y, Z)v) \\ &= \nabla_X^N \nabla_Y^N Z + B(X, \nabla_Y^N Z) + X(B(Y, Z))v + B(Y, Z)\nabla_X v.\end{aligned}$$

De même

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \nabla_Y^N \nabla_X^N Z + B(Y, \nabla_X^N Z) + Y(B(X, Z))v + B(X, Z)\nabla_Y v.$$

De plus  $\nabla_X^N Y - \nabla_Y^N X = [X, Y]$  donc  $B([X, Y], Z) = B(\nabla_X^N Y, Z) - B(\nabla_Y^N X, Z)$  ce qui donne

$$\nabla_{[X, Y]} Z = \nabla_{[X, Y]}^N Z + B([X, Y], Z) = \nabla_{[X, Y]}^N Z + B(\nabla_X^N Y, Z)v - B(\nabla_Y^N X, Z)v.$$

Ainsi ceci nous donne que

$$\begin{aligned}R(X, Y)Z &= R^N(X, Y)Z + X(B(Y, Z))v - B(\nabla_X^N Y, Z)v - B(Y, \nabla_X^N Z)v \\ &\quad - Y(B(X, Z))v + B(\nabla_Y^N X, Z)v + B(X, \nabla_Y^N Z)v \\ &\quad + B(Y, Z)\nabla_X v - B(X, Z)\nabla_Y v \\ &= R^N(X, Y)Z + B(Y, Z)\nabla_X v - B(X, Z)\nabla_Y v + \left[ \nabla_X^N B(X, Z) - \nabla_Y^N B(X, Z) \right]v.\end{aligned}$$

Or on sait que  $\nabla_Y v, \nabla_X v, R^Z(X, Y)Z \in TN$  et que  $\|v\| = 1$  ce qui donne le résultat voulu

$$g(R(X, Y)Z, v) = \nabla_X^N B(X, Z) - \nabla_Y^N B(X, Z).$$

□

**Par la suite nous ne nous intéresserons plus qu'à la seconde forme fondamentale scalaire ainsi on notera  $A = B$ .**

### B.3.2 Cas particulier des hypersurfaces de $\mathbb{R}^{n+1}$

On s'intéresse maintenant au cas particulier où  $M = \mathbb{R}^{n+1}$ . C'est à dire on considère  $(M, g)$  une sous-variété de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Tout d'abord on utilise l'équation de Gauss (B.2.2) pour montrer le lien entre le tenseur de courbure et la seconde forme fondamentale de  $M$ .

**Proposition B.3.3.** Soit  $(x^1, \dots, x^n)$  un système de coordonnées on a alors

$$R_{ijkl} = h_{il}h_{jk} - h_{ik}h_{jl}$$

*Démonstration.* On utilise simplement le tenseur l'équation de Gauss (B.2.2) et le fait que le tenseur de courbure de  $\mathbb{R}^{n+1}$  est nulle. On a ainsi

$$\begin{aligned}R_{ijkl} &= g \left( R \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \\ &= \left\langle A \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) v, A \left( \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) v \right\rangle - \left\langle A \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) v, A \left( \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) v \right\rangle \\ &= h_{jl}h_{jk} \langle v, v \rangle - h_{ik}h_{jl} \langle v, v \rangle \\ &= h_{il}h_{jk} - h_{ik}h_{jl} \quad \text{car } \|v\| = 1.\end{aligned}$$

□

**Remarque B.3.1.** Comme on l'a vu dans la remarque (B.1.2), avec la notation d'Hamilton on a

$$\nabla_i \nabla_j T - \nabla_j \nabla_i T = R * T.$$

Ainsi grâce à la dernière proposition on a

$$\nabla_i \nabla_j T - \nabla_j \nabla_i T = A * A * T.$$

Il nous reste plus qu'à étudier la dérivée covariante et le laplacien de la seconde forme fondamentale. Pour la dérivée covariante nous avons montré déjà l'équation de Codazzi, qui nous donne dans notre cas particulier :

**Proposition B.3.4.** *Equation de Codazzi*

Pour  $X, Y, Z \in \Gamma(M)$  on a

$$\nabla_X A(Y, Z) = \nabla_X A(Y, Z)$$

Ce qui donne avec  $(x^1, \dots, x^n)$  un système de coordonnées

$$\nabla_j h_{ik} = \nabla_i h_{jk} = \nabla_k h_{ij}$$

*Démonstration.* L'espace ambiant est  $\mathbb{R}^{n+1}$  et son tenseur est nulle, ce qui donne le résultat pour la première égalité.  $\square$

Les derniers résultats que nous aurons besoins sont les identités de Simon, qui nous donnent le laplacien de la seconde forme fondamentale. Pour la deuxième égalité on utilise aussi la symétrie de  $A$ .

**Théorème B.3.1.** *Identités de Simon*

$$\Delta A = \nabla^2 H + HA^2 - |A|^2 A \quad (\text{B.3.2})$$

$$\frac{1}{2} \Delta |A|^2 = g(A, \nabla^2 H) + |\nabla A|^2 + H \text{Trace}(A^3) - |A|^4 \quad (\text{B.3.3})$$

où dans un système de coordonnées les coefficients de  $A^2$ , et  $A^3$  sont  $h_{ij}^2 = h_{il} g^{ls} h_{sj}$  et  $h_{uv}^3 = h_{uk} g^{ki} h_{il} g^{lm} h_{mv}$ .

*Démonstration.* On commence par montrer la première identité (B.3.2), pour cela on considère des coordonnées normales en  $p$  que l'on notera  $(x^1, \dots, x^n)$ .

Ainsi dans ces coordonnées on sait que en  $p$  :

$$\Delta h_{ij} = g^{kl} (\nabla_k \nabla_l h_{ij} - \Gamma_{kl}^m \nabla_m h_{ij}) = \delta_{kl} \nabla_k \nabla_l h_{ij} = \nabla_k \nabla_k h_{ij}$$

et d'après l'équation de Codazzi (B.3.4), on a  $\Delta h_{ij} = \nabla_k \nabla_i h_{kj}$ .

Or on sait que :

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_i A &= \nabla_k \left( \partial_i (h_{jl}) dx^j \otimes dx^l + h_{jl} \nabla_i (dx^j \otimes dx^l) \right) \\ &= \partial_k \partial_i (h_{jl}) dx^j \otimes dx^l + \partial_i h_{jl} \nabla_k (dx^j \otimes dx^l) + \partial_k h_{jl} \nabla_i (dx^j \otimes dx^l) + h_{jl} \nabla_k \nabla_i (dx^j \otimes dx^l) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_i A - \nabla_i \nabla_k A &= \left[ \nabla_k \nabla_i (dx^j \otimes dx^l) - \nabla_i \nabla_k (dx^j \otimes dx^l) \right] h_{jl} \\ &= \left[ \left( \nabla_k \nabla_i dx^j \right) \otimes dx^l + \nabla_k dx^j \otimes \nabla_i dx^l + \nabla_i dx^j \otimes \nabla_k dx^l + dx^j \otimes \left( \nabla_k \nabla_i dx^l \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \nabla_i \nabla_k dx^j \right) \otimes dx^l - \nabla_i dx^j \otimes \nabla_k dx^l - \nabla_k dx^j \otimes \nabla_i dx^l - dx^j \otimes \left( \nabla_i \nabla_k dx^l \right) \right] h_{jl} \\ &= \left[ \left( \nabla_k \nabla_i dx^j - \nabla_i \nabla_k dx^j \right) \otimes dx^l + dx^l \otimes \left( \nabla_k \nabla_i dx^l - \nabla_i \nabla_k dx^l \right) \right] h_{jl} \\ &= \left[ R_{kimz} g^{mj} dx^z \otimes dx^l + R_{kimz} g^{ml} dx^j \otimes dx^z \right] h_{jl}, \end{aligned} \quad \text{d'après B.1.1.}$$

Ainsi, en  $p$  d'après les coordonnées normales on a :

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_i h_{kj} - \nabla_i \nabla_k h_{kj} &= R_{kimk} g^{m\beta} h_{\beta j} + R_{kimj} g^{m\alpha} h_{k\alpha} \\ &= R_{ki\beta k} h_{\beta j} + R_{ki\alpha j} h_{k\alpha} \\ &= h_{\beta j} (h_{kk} h_{i\beta} - h_{ik} h_{k\beta}) + h_{k\alpha} (h_{kj} h_{i\alpha} - h_{ij} h_{h\alpha}) \end{aligned} \quad \text{d'après (B.3.3)}$$

Ainsi on obtient,

$$\begin{aligned} \Delta h_{ij} &= \nabla_i \nabla_k h_{kj} + h_{\beta j} (h_{kk} h_{i\beta} - h_{ik} h_{k\beta}) + h_{k\alpha} (h_{kj} h_{i\alpha} - h_{ij} h_{h\alpha}) \\ &= \nabla_i \nabla_j h_{kk} + h_{\beta j} h_{kk} h_{i\beta} - h_{\beta j} h_{ik} h_{k\beta} + h_{k\alpha} h_{kj} h_{i\alpha} - h_{k\alpha} h_{ij} h_{h\alpha} \quad \text{par l'équation de Codazzi (B.3.4).} \end{aligned}$$

Or dans les coordonnées normales on a en  $p$  :

- .  $H = g^{ij} h_{ij} = \delta_{ij} h_{ij} = h_{ii}$ ,
- .  $|A|^2 = g^{ij} g^{kl} h_{ik} h_{jl} = \delta_{ij} \delta_{kl} h_{ik} h_{jl} = h_{ik} h_{ik}$ ,
- .  $h_{ij}^2 = h_{il} g^{lm} h_{mj} = h_{il} \delta_{ml} h_{mj} = h_{il} h_{lj}$ .

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Delta h_{ij} &= \nabla_i \nabla_j h_{kk} + h_{i\alpha} h_{\alpha j}^2 - h_{ij} |A|^2 + H h_{ij}^2 - h_{ik} h_{kj}^2 \\ &= \nabla_i \nabla_j H - h_{ij} |A|^2 + H h_{ij}^2, \end{aligned}$$

de plus étant dans des coordonnées normales  $\nabla_{ij}^2 H = \nabla_i \nabla_j H$  donc on a bien le résultat voulu :

$$\Delta A = \nabla^2 H + H A^2 - |A|^2 A$$

Montrons maintenant la deuxième égalité (B.3.3).

On a montré que  $|A|^2 = (h_{ij})^2$  et comme on est dans des coordonnées normales  $\Delta(h_{ij})^2 = \nabla_k \nabla_k (h_{ij})^2$  ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |A|^2 &= \frac{1}{2} \Delta (h_{ij})^2 \\ &= \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_k (h_{ij})^2 \\ &= (\nabla_k h_{ij})^2 + h_{ij} \nabla_k \nabla_k h_{ij} \\ &= (\nabla_k h_{ij})^2 + h_{ij} \Delta h_{ij} \\ &= (\nabla_k h_{ij})^2 + h_{ij} \left( \nabla_{ij}^2 H - h_{ij} |A|^2 + H h_{ij}^2 \right) && \text{par B.3.2} \\ &= (\nabla_k h_{ij})^2 + h_{ij} \nabla_{ij}^2 H + H h_{ij} h_{ij}^2 - |A|^4 \end{aligned}$$

Or dans des coordonnées normales on a,

$$\begin{aligned} \text{Trace}(A^3) &= g^{uv} h_{uv}^3 \\ &= \delta_{uv} h_{uk} g^{ki} h_{il} g^{lm} h_{mv} \\ &= h_{uk} h_{kl} h_{lu} \\ &= h_{uk} (h_{kl} g^{lm} h_{mu}) \\ &= h_{uk} h_{ku}^2. \end{aligned}$$

Comme  $g(A, \nabla^2 H) = g^{ik} g^{jl} h_{ij} \nabla_{kl}^2 H = h_{ij} \nabla_{ij}^2 H$ , on obtient donc :

$$\frac{1}{2} \Delta |A|^2 = (\nabla_k h_{ij})^2 + g(A, \nabla^2 H) + H \text{Trace}(A^3) - |A|^4$$

Il nous reste à vérifier que  $(\nabla_k h_{ij})^2 = |\nabla A|^2$ , or on a par définition,

$$|\nabla A|^2 = g(\nabla A, \nabla A) = g^{kl} g^{iu} g^{jv} \nabla_k h_{ij} \nabla_l h_{uv} = (\nabla_k h_{ij})^2.$$

On a donc le résultat voulu. □

**Lemme B.3.1.** Soit  $M$  une variété compacte sans bord de dimension  $n$  et  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  une immersion, alors on ne peut avoir  $A = 0$  sur tout  $\varphi(M)$ .

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde en supposant  $A = 0$ . Soit  $p \in M$  et  $U$  un voisinage tel que dessus on ait des coordonnées notées  $(x^1, \dots, x^n)$ . Soit  $q \in U$ , pour tout  $Y \in T_{\varphi(q)} \varphi(M)$   $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ , on a :

$$g(-\nabla_{\partial_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} v, Y) = A(\partial_i, Y) = 0$$

Ce qui donne  $\partial_i v = \nabla_{\partial_i}^{n+1} v = 0$ , ainsi  $v$  est constant sur  $U$ . On a alors,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \langle \varphi(q), v(p) \rangle = \frac{\partial}{\partial x^i} \langle \varphi(q), v(q) \rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(q), v(q) \right\rangle = 0.$$

Donc  $q \mapsto \langle \varphi(q), v(p) \rangle$  est constante sur  $U$ , ainsi  $\varphi(U)$  est inclus dans un plan.

Par compacité de  $\varphi(M)$ ,  $\varphi(M)$  est inclus dans un nombre fini de plan donc dans un unique plan  $P$ . Or, on sait que  $\varphi(M)$  est compacte donc fermé dans  $P$ , si  $\varphi(M)$  est ouvert alors par connexité de  $P$ ,  $\varphi(M) = P$  où  $\varphi(M) = \emptyset$  ce qui est absurde. Ainsi  $\varphi(M)$  admet une frontière donc un bord ce qui est absurde. □

## C Exemples de variétés

L'objectif maintenant va être de calculer les quantités géométriques dans 2 cas différents, ceci nous sera utile dans la deuxième partie. Nous nous intéresserons surtout à la seconde forme fondamentale et la courbure moyenne.

### C.1 Graphe d'une fonction

On considère  $M$  une sous-variété de dimensions  $n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  qui est localement décrite comme un graphe d'une fonction. C'est à dire qu'il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $V$  un ouvert de  $M$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $C^\infty$  telle que

$$M \cap V = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}.$$

Ainsi  $M \cap V = \varphi(U)$  où  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$   
 $x \mapsto (x, f(x))$  est un plongement.

On note  $(x^1, \dots, x^n)$  les coordonnées sur  $U$ , on a donc pour les coefficients de la métrique

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle = \delta_i^j + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

De plus on sait que le plan tangent à  $M$  est engendré par  $(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x^n})$  ainsi en  $p = (x, f(x)) \in M \cap V$  on a

$$T_p M = \{(h, \langle \nabla_x f, h \rangle) \mid h \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ainsi soit  $v \in T_p M^\perp$  on a pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$ ,

$$0 = \langle v, (h, \langle \nabla_x f, h \rangle) \rangle = \sum_{i=1}^n v_i h_i + v_{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} h_i$$

On prend donc comme vecteur normal  $v = -\frac{(\nabla f, -1)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}$ . On peut donc calculer la seconde forme fondamentale de  $M$

$$h_{ij} = A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\right) = \left\langle \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}}^{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}, v \right\rangle,$$

Or on a  $\nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}}^{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} = \left(x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)$ , ce qui donne

$$h_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\text{Hess}_{i,j}(f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}.$$

Pour calculer la courbure moyenne il nous faut inverser la matrice  $n \times n$  qui a pour coefficient les  $g_{ij} = \delta_i^j + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}$ , or on remarque que si on pose  $g^{ij} = \delta_i^j - \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}$  on a

$$\begin{aligned} g_{ik} g^{ki} &= 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^2 - \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^2 - \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^4 - \sum_{k \neq i} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^k}\right)^2 \\ &= 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^2 - \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^2 - \frac{|\nabla f|^2}{1+|\nabla f|^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Et pour  $i \neq j$  on a

$$\begin{aligned}
g_{ik}g^{kj} &= - \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} \left[ \frac{\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}}{1 + |\nabla f|^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)^2 \right] - \left( 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^2 \right) \frac{\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}}{1 + |\nabla f|^2} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} \left( 1 - \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^2}{1 + |\nabla f|^2} \right) \\
&= - \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} \left[ \frac{\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}}{1 + |\nabla f|^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)^2 \right] - \frac{\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}}{1 + |\nabla f|^2} - \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^3 \frac{\partial f}{\partial x^j}}{1 + |\nabla f|^2} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^3 \frac{\partial f}{\partial x^i}}{1 + |\nabla f|^2} \\
&= - \frac{|\nabla f|^2}{1 + |\nabla f|^2} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a donc pour la courbure moyenne

$$\begin{aligned}
H &= g^{ij} h_{ij} \\
&= \sum_{i,j} \left( \delta_i^j - \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \frac{\text{Hess}_{i,j}(f)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \\
&= \sum_i \frac{\text{Hess}_{i,i}(f)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \sum_{i,j} \frac{\text{Hess}_{i,j}(f)}{\left( \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \right)^3} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} \\
&= \frac{\Delta f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \frac{\text{Hess}(f)(\nabla f, \nabla f)}{\left( \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \right)^3},
\end{aligned}$$

où on a noté  $\text{Hess}(f)(X, Y) = \sum_{i,j} \text{Hess}_{i,j}(f) X^i Y^j = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} X^i Y^j$ .  
De plus on peut remarquer que

$$H = \frac{\Delta f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \frac{\text{Hess}(f)(\nabla f, \nabla f)}{\left( \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \right)^3} = \text{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)$$

## C.2 Courbe de niveau

On considère maintenant une variété qui est localement décrite comme le zéro d'une fonction, c'est à dire soit  $M$  une sous-variété de dimensions  $n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  telle qu'il existe  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $V$  un ouvert de  $M$  et une fonction  $C^\infty$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\nabla f \neq 0$  sur  $U$  et

$$M \cap V = \{x \in U \mid f(x) = 0\}.$$

On écrit pour  $z \in U$ ,  $z = (x, y)$  où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $y \in \mathbb{R}$ , ainsi  $f(z) = f(x, y)$ . Et on notera  $\nabla_x f = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$  les dérivées de  $f$  par rapport au  $n$  premières variables. Comme sur  $U$ ,  $\nabla f \neq 0$ , on peut supposer que pour tout  $(x, y) \in U$ ,  $\partial_y f = \frac{\partial f}{\partial y} > 0$ .

Ainsi par le théorème des fonctions implicites, quitte à réduire  $U$ , il existe  $W$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $I$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $\Psi: W \rightarrow I$  telle que

$$M \cap V = \{x \in U \mid f(x) = 0\} = \{(x, \Psi(x)) \mid x \in W\}.$$

De plus on sait que

$$\nabla \Psi(x) = - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, \Psi(x)) \right)^{-1} \nabla_x f(x, \Psi(x)),$$

et on a déjà vu que pour les graphes on a pour la courbure moyenne sur  $M \cap V$

$$H = \frac{\Delta \Psi}{\sqrt{1 + |\nabla \Psi|^2}} - \frac{\text{Hess}(\Psi)(\nabla \Psi, \nabla \Psi)}{\left(\sqrt{1 + |\nabla \Psi|^2}\right)^3}.$$

Il nous reste donc à exprimer les différentes dérivées de  $\Psi$  en fonction de celle de  $f$ , pour cela on sait déjà que

$$\partial_i \Psi(x) = - \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, \Psi(x)) \right)^{-1} \partial_i f(x, \Psi(x)).$$

Pour les dérivées secondes, que l'on notera  $\partial_{i,j}^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial x^j}$  et  $\partial_{i,y}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial y}$ , on a (où on ne note pas que  $f$  est évaluée en  $(x, \Psi(x))$ )

$$\begin{aligned} \partial_{i,j}^2 \Psi &= \frac{\partial_{j,y}^2 f + \partial_{y,y}^2 f \partial_j \Psi}{(\partial_y f)^2} \partial_i f - \frac{1}{\partial_y f} \left[ \partial_{j,i}^2 f + \partial_j g \partial_{y,i}^2 f \right] \\ &= \frac{\partial_{j,y}^2 f}{(\partial_y f)^2} \partial_i f - \frac{\partial_{y,y}^2 f}{(\partial_y f)^3} \partial_j f - \frac{1}{\partial_y f} \partial_{j,i}^2 f + \frac{\partial_{y,i}^2 f}{(\partial_y f)^2} \partial_j f. \end{aligned}$$

Ce qui donne pour le laplacien de  $\Psi$

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= - \frac{1}{\partial_y f} \Delta f + \frac{1}{\partial_y f} \partial_{y,y}^2 f + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial_i f}{(\partial_y f)^2} \partial_{i,y}^2 f - \frac{1}{(\partial_y f)^3} \sum_{i=1}^n (\partial_i f)^2 \partial_{y,y}^2 f \\ &= - \frac{1}{\partial_y f} \Delta f + \frac{2}{\partial_y f} \partial_{y,y}^2 f + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial_i f}{(\partial_y f)^2} \partial_{i,y}^2 f - \frac{|f|^2}{(\partial_y f)^3} \partial_{y,y}^2 f, \end{aligned}$$

et pour la hessienne de  $\Psi$

$$\begin{aligned} \text{Hess}(\Psi)(\nabla \Psi, \nabla \Psi) &= \frac{1}{(\partial_y f)^2} \sum_{i,j} \partial_i f \partial_j f \partial_{i,j}^2 \Psi \\ &= \frac{1}{(\partial_y f)^3} \sum_{i,j} \partial_i f \partial_j f \partial_{i,j}^2 f + \frac{2}{(\partial_y f)^4} \sum_{i,j} (\partial_i f)^2 \partial_j f \partial_{j,y}^2 f - \frac{1}{(\partial_y f)^5} \sum_{i,j} (\partial_i f)^2 (\partial_j f)^2 \partial_{y,y}^2 f \\ &= \frac{1}{(\partial_y f)^3} \sum_{i,j} \partial_i f \partial_j f \partial_{i,j}^2 f + \frac{2}{(\partial_y f)^4} (|\nabla f|^2 - (\partial_y f)^2) \sum_{j=1}^n \partial_j f \partial_{j,y}^2 f - \frac{\partial_{y,y}^2 f}{(\partial_y f)^5} (|\nabla f|^2 - (\partial_y f)^2)^2 \\ &= - \frac{1}{(\partial_y f)^3} \text{Hess}(f)(\nabla f, \nabla f) - \frac{|\nabla f|^4}{(\partial_y f)^5} \partial_{y,y}^2 f + 2 \frac{|\nabla f|^2}{(\partial_y f)^3} \partial_{y,y}^2 f + 2 \frac{|\nabla f|^2}{(\partial_y f)^4} \sum_{j=1}^n \partial_j f \partial_{j,y}^2 f. \end{aligned}$$

Et en utilisant que  $\sqrt{1 + |\Psi|^2} = \frac{|f|}{\partial_y f}$ , on a donc

$$\begin{aligned} H &= \frac{\Delta \Psi}{\sqrt{1 + |\nabla \Psi|^2}} - \frac{\text{Hess}(\Psi)(\nabla \Psi, \nabla \Psi)}{\left(\sqrt{1 + |\nabla \Psi|^2}\right)^3} \\ &= \partial_y f \frac{\Delta \Psi}{|f|} - (\partial_y f)^3 \frac{\text{Hess}(\Psi)(\nabla \Psi, \nabla \Psi)}{|f|^3} \\ &= - \frac{\Delta f}{|\nabla f|} + \frac{\text{Hess}(f)(\nabla f, \nabla f)}{|\nabla f|^3} + 2 \frac{\partial_{y,y} f}{|\nabla f|} + \frac{2}{|\nabla f|} \sum_{i=1}^n \frac{\partial_i f}{\partial_y f} \partial_{i,y}^2 f - \frac{|\nabla f|}{(\partial_y f)^2} \partial_{y,y}^2 f - \frac{(\partial_y f)^2}{|\nabla f|^3} \partial_{y,y}^2 f \\ &\quad + \frac{|\nabla f|}{(\partial_y f)^2} \partial_{y,y}^2 f + \frac{(\partial_y f)^2}{|\nabla f|^3} \partial_{y,y}^2 f - 2 \frac{\partial_{y,y} f}{|\nabla f|} - \frac{2}{|\nabla f|} \sum_{i=1}^n \frac{\partial_i f}{\partial_y f} \partial_{i,y}^2 f \\ &= - \frac{\Delta f}{|\nabla f|} + \frac{\text{Hess}(f)(\nabla f, \nabla f)}{|\nabla f|^3}. \end{aligned}$$

De plus on peut remarquer que

$$H = - \frac{\Delta f}{|\nabla f|} + \frac{\text{Hess}(f)(\nabla f, \nabla f)}{|\nabla f|^3} = \text{div} \left( \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right).$$



Et on a pour le vecteur normal

$$v = -\frac{(\nabla\Psi, -1)}{\sqrt{1+|\nabla\Psi|^2}} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}.$$